35. Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg

Lösungsbeispiele für die
Aufgaben der 1. Runde 2021/2022

2021

Aufgabe 1

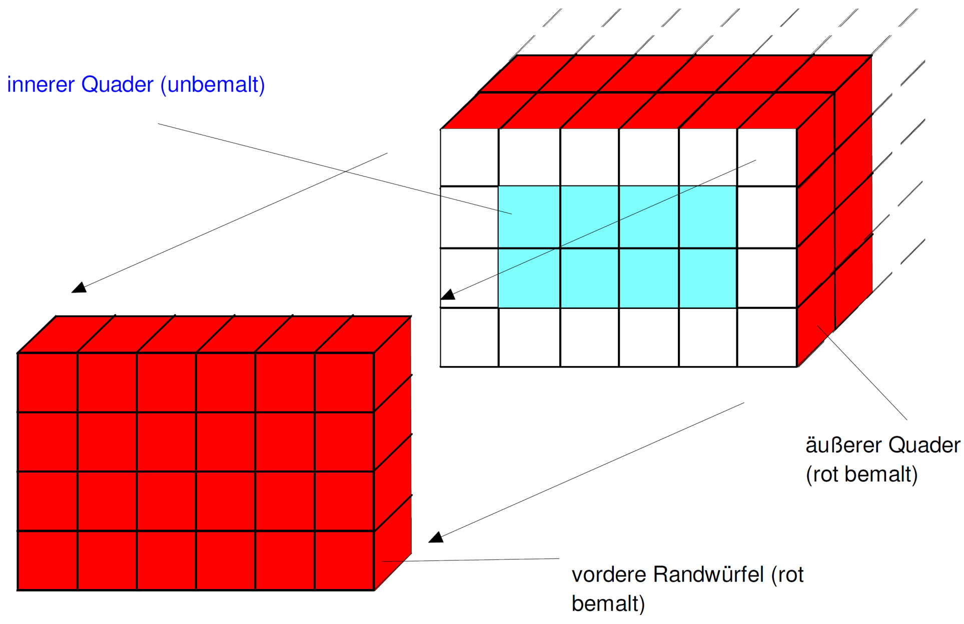
Paul baut 120 Würfel mit Kantenlänge 1cm lückenlos zu einem Quader zusammen. Anschließend malt er alle sechs Seitenflächen des Quaders rot an. Danach zerlegt er den Quader wieder und zählt 24 Würfel ohne rote Seite.
Bestimme den Oberflächeninhalt von Pauls Quader. Begründe, dass es nur eine Möglichkeit gibt.

Lösung:

Pauls Quader hat den Oberflächeninhalt $148cm^2$.

1. Beweis (durch Probieren):

Löst man vorsichtig die rot bemalten Würfel von Pauls Quader ab, so bleibt ein „innerer“ Quader übrig:



Da man in jeder Richtung eine Würfelschicht abgelöst hat, sind alle Seitenlängen des inneren Quaders um $2cm$ kürzer. Wenn der innere Quader also die Seitenlängen a, b und c hat (jeweils in cm), so hat der ursprüngliche Quader (also Pauls Quader) die Seitenlängen $a+2, b+2$ und $c+2$. Der innere Quader besteht genau aus den unbemalten Würfeln. Nach Aufgabenstellung sind das 24 Würfel.

Es ergeben sich also die folgenden beiden Gleichungen:

(1) $a \cdot b \cdot c = 24$

(2) $(a+2) \cdot (b+2) \cdot (c+2) = 120$

Für die Seitenlängen a, b, c des inneren Quaders können wir annehmen, dass $a \leq b \leq c$ gilt, sonst vertauschen wir die Bezeichnungen. Wegen Gleichung (1) muss man 24 in das Produkt von drei aufsteigenden Zahlen zerlegen.

(a) Zunächst beginnt man mit den Zerlegungen, bei denen die kleinste Zahl a gleich 1 ist. Dann ist $b \cdot c = 24$, also gibt es die Fälle $b = 1, c = 24$; $b = 2, c = 12$; $b = 3, c = 8$ und $b = 4, c = 6$. Wenn b größer wird, so muss c kleiner als b werden, das widerspricht der Annahme $b \leq c$.

(b) Nun betrachten wird die Zerlegungen mit $a = 2$. Aus $b \cdot c = 12$ und $a \leq b \leq c$ ergeben sich die Möglichkeiten $b = 2, c = 6$ und $b = 3, c = 4$. Hier kann b nicht größer als 3 sein, denn sonst ist $c < b$.

(c) Falls nun a größer als 2 ist, also $a \geq 3$, so ist $b \cdot c \leq 8$, denn $a \cdot b \cdot c = 24$. Da $a \leq b \leq c$ müssen die beiden Zahlen b und c aber mindestens 3 sein, also $b \cdot c \geq 9$. Dies widerspricht $b \cdot c \leq 8$. Somit ist es nicht möglich, dass a größer als 2 ist. Alle Möglichkeiten wurden in (a) und (b) erfasst.

Man kann also 24 auf genau 6 Arten als Produkt von 3 aufsteigenden Zahlen schreiben:

$$24 = 1 \cdot 1 \cdot 24 = 1 \cdot 2 \cdot 12 = 1 \cdot 3 \cdot 8 = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Somit gibt es nur genau die in der folgenden Tabelle dargestellten sechs Möglichkeiten für die Seitenlängen a, b und c. Jeweils wurde dazu die Würfelanzahl $A = (a+2) \cdot (b+2) \cdot (c+2)$ des äußeren Quaders berechnet und mit 120 verglichen. (Alle Seitenlängen in cm).

a	b	c	a+2	b+2	c+2	Anzahl Würfel äußerer Quader $A = (a+2) \cdot (b+2) \cdot (c+2)$	A=120 ?
1	1	24	3	3	26	234	nein
1	2	12	3	4	14	168	nein
1	3	8	3	5	10	150	nein
1	4	6	3	6	8	144	nein
2	2	6	4	4	8	128	nein
2	3	4	4	5	6	120	ja

Nur im letzten Fall hat also Pauls Quader 120 Würfel. Somit ist Pauls Quader $6cm$ lang, $5cm$ breit und $4cm$ hoch. Sein Oberflächeninhalt beträgt

$$O = 2 \cdot (4cm \cdot 5cm) + 2 \cdot (4cm \cdot 6cm) + 2 \cdot (5cm \cdot 6cm) = 148cm^2$$

Da alle Möglichkeiten für die Maße des Quaders überprüft wurden, gibt es nur diese eine Möglichkeit für die Maße und für den Oberflächeninhalt von Pauls Quader.

2. Beweis (mit Teilbarkeit):

Wie im ersten Beweisvorschlag erhält man für die Seitenlängen a, b, c des inneren Quaders die beiden Gleichungen

(1) $a \cdot b \cdot c = 24$

(2) $(a+2) \cdot (b+2) \cdot (c+2) = 120$

Hierbei $a \leq b \leq c$, sonst vertauschen wir die Bezeichnungen. Da 120 durch 5 teilbar ist, ist einer der drei Faktoren $a+2, b+2$ oder $c+2$ durch 5 teilbar. Wir schreiben x für diesen durch 5 teilbaren Faktor. Es gilt also $x = 5, 10, 15, 20, \ldots$. Da $x-2$ ein Teiler von 24 ist, kommt nur x=5 oder x=10 in Frage, d.h. $x-2=3$ oder $x-2=8$.

1. **F**all: Sei $x-2=8$. Eine Seite des inneren Quaders hat die Länge 8cm. Da $a \cdot b \cdot c = 24$, folgt $a=1$, $b=3$ und $c=8$. Somit hat der ursprüngliche Quader die Maße $3cm$, $5cm$ und $10cm$. Er würde also aus 150 Würfeln und nicht wie verlangt aus 120 Würfeln bestehen. Dieser Fall ist also nicht möglich.

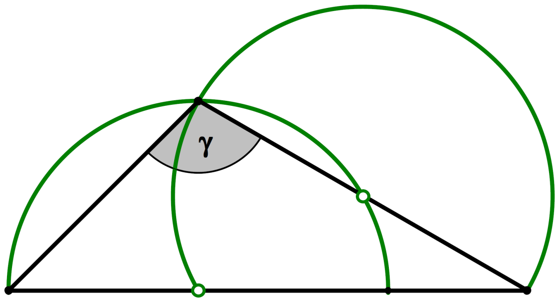
2. **F**all: Sei $x-2=3$. Da $a \cdot b \cdot c = 24$ wären die Seitenlängen des inneren Quaders also $1cm, 3cm, 8cm$ oder $2cm, 3cm, 4cm$. Die erste Möglichkeit wurde im 1. Fall ausgeschlossen. Es bleibt also nur $a=2, b=3, c=4$. Dann hat der äußere Quader die Maße $4cm, 5cm, 6cm$ und besteht aus 120 Würfeln. Dies ist die einzige Möglichkeit.

Der Oberflächeninhalt beträgt also

$$O = 2 \cdot (4cm \cdot 5cm) + 2 \cdot (4cm \cdot 6cm) + 2 \cdot (5cm \cdot 6cm) = 148cm^2$$

Aufgabe 2

Bestimme die Größe des Winkels γ.

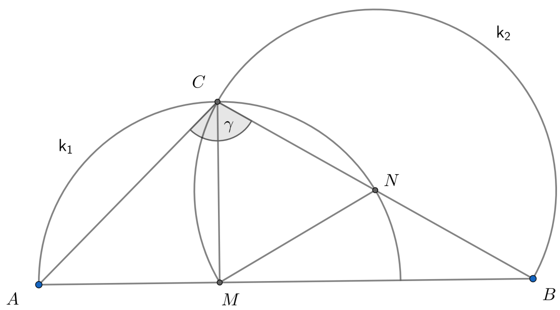


Lösung:

Die Größe des Winkels γ beträgt $105°$.

1. Beweis (Winkeljagd in gleichschenkligen Dreiecken):

Wir bezeichnen die Mittelpunkte der Kreisbögen k_1 und k_2 mit M bzw. N und die Eckpunkte des Dreiecks mit dem Innenwinkel γ mit A, B und C (siehe Skizze). Da die Strecke $\overline{MN}$ sowohl Radius von k_1 als auch von k_2 ist, haben beide Kreise den gleichen Radius. Folglich sind die Strecken $\overline{MN}$, $\overline{MC}$ und $\overline{NC}$ gleich lang und das Dreieck $\triangle MNC$ ist gleichseitig und seine Innenwinkel haben alle die Größe $60°$.



$$\angle NMC = \angle MCN = \angle CNM = 60° \,. \tag{1}$$

- Die Winkel $\angle CNM$ und $\angle MNB$ sind Nebenwinkel und ihre Summe ist daher gleich $180°$. Also ist $\angle MNB = 180° - 60° = 120°$.
- Das Dreieck $\triangle MBN$ ist gleichschenklig mit den Schenkeln $\overline{MN}$ und $\overline{NB}$, die beide Radien von k_2 sind. Daher sind die Winkel $\angle NBM$ und $\angle BMN$ gleich groß. Da die Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle MBN$ $180°$ beträgt ist $\angle BMN + \angle NBM + \angle MNB = 180°$, woraus $\angle BMN = 30°$ folgt.
- Die Winkel $\angle BMN$, $\angle NMC$ und $\angle CMA$ ergeben zusammen einen gestreckten Winkel, d.h. $\angle CMA = 180° - \angle BMN - \angle NMC = 180° - 30° - 60° = 90°$.
- Das Dreieck $\triangle AMC$ ist also rechtwinklig. Da $\overline{MA}$ und $\overline{MC}$ Radien von k_1 sind, ist dieses Dreieck auch gleichschenklig mit $\angle MAC = \angle ACM$. Folglich ist $\angle MAC = \angle ACM = \frac{1}{2}(180° - 90°) = 45°$.

Für den Winkel γ folgt: $\gamma = \angle ACM + \angle MCB = 45° + 60° = 105°$.

Variante:

Wie im ersten Beweis erhält man

$$\angle NMC = \angle MCN = \angle CNM = 60^\circ\,.$$

- Die Strecke $\overline{BC}$ ist Durchmesser des Kreisbogens k_2 und M liegt auf dem Thaleskreis über diesem Durchmesser. Mit dem Satz des Thales folgt $\angle BMC = 90^\circ$.
- Winkel $\angle CMA$ ist Nebenwinkel von $\angle BMC$ und hat folglich ebenfalls die Größe von 90°.
- Das Dreieck $\triangle AMC$ ist also rechtwinklig. Da $\overline{MA}$ und $\overline{MC}$ Radien von k_1 sind, ist dieses Dreieck auch gleichschenklig mit $\angle MAC = \angle ACM$. Folglich ist $\angle MAC = \angle ACM = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 90^\circ\right) = 45^\circ$.

Für den Winkel γ folgt: $\gamma = \angle ACM + \angle MCB = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$.

Aufgabe 3

Zehn $1-$€*-Münzen und zehn* $2-$€*-Münzen werden in beliebiger Reihenfolge nebeneinander auf einen Tisch gelegt.*
Zeige, dass es in dieser Reihe immer zehn direkt aufeinanderfolgende Münzen gibt, unter denen sich genau fünf $1-$€*-Münzen und fünf* $2-$€*-Münzen befinden.*

1. Beweis:

Teilt man die Reihe der zwanzig Münzen in zwei Blöcke mit je zehn nebeneinander liegenden Münzen und enthält zufällig jeder Block schon fünf $1-$€-Münzen und fünf $2-$€-Münzen, so ist man fertig.
Enthält ein Block weniger als fünf $1-$€-Münzen, dann enthält der andere Block mit Sicherheit mehr als fünf $1-$€-Münzen, da insgesamt zehn $1-$€-Münzen auf dem Tisch liegen.
Der Block mit weniger als fünf $1-$€-Münzen wird Block A genannt, der andere wird Block B genannt.
Legt man nun einen Rahmen um Block A und verschiebt diesen Rahmen um eine Münze in Richtung von Block B, können die folgenden Fälle auftreten:

1) Eine $1-$€-Münze verschwindet aus dem Rahmen und eine $1-$€-Münze kommt hinzu. Die Anzahl der $1-$€-Münzen im Rahmen ändert sich nicht.
2) Eine $2-$€-Münze verschwindet aus dem Rahmen und eine $2-$€-Münze kommt hinzu. Die Anzahl der $1-$€-Münzen im Rahmen ändert sich nicht.
3) Eine $1-$€-Münze verschwindet aus dem Rahmen und eine $2-$€-Münze kommt hinzu. Die Anzahl der $1-$€-Münzen im Rahmen verringert sich um 1.
4) Eine $2-$€-Münze verschwindet aus dem Rahmen und eine $1-$€-Münze kommt hinzu. Die Anzahl der $1-$€-Münzen im Rahmen vergrößert sich um 1.

Die Anzahl der 1 – €-Münzen ändert sich bei jeder dieser Verschiebungen also jeweils höchstens um 1.
Da die Anzahl der 1 – €-Münzen in Block A kleiner als fünf und in Block B größer als fünf ist und sich die Anzahl der Münzen bei einer Verschiebung um höchstens 1 ändert, müssen bei fortgesetzter Verschiebung des Rahmens hin auf Block B mindestens einmal genau fünf 1 – €-Münzen im Rahmen erscheinen.

2. Beweis:

Zunächst stellt man fest, dass fünf 1 – €-Münzen und fünf 2 – €-Münzen zusammen den Wert 15€ haben. Ersetzt man in dieser Menge von Münzen nun eine Anzahl von 1 – €-Münzen durch die selbe Anzahl von 2 – €-Münzen, so erhöht sich der Gesamtwert der Münzen. Andererseits verringert sich der Gesamtwert der Münzen, wenn man eine Anzahl von 2 – €-Münzen durch die selbe Anzahl von 1 – €-Münzen ersetzt.
Das bedeutet: Der Gesamtwert von 15€ kann durch insgesamt zehn Münzen nur durch fünf 1 – €-Münzen und fünf 2 – €-Münzen gebildet werden. Enthält die Menge weniger als fünf 1 – €-Münzen, dann ist der Gesamtwert der Münzen größer als 15€, enthält sie mehr als fünf 1 – €-Münzen, so ist der Gesamtwert kleiner als 15€.
Nun wird gezeigt, dass es unter zehn 1 – €-Münzen und zehn 2 – €-Münzen, die in beliebiger Reihenfolge nebeneinander auf einen Tisch gelegt werden, immer zehn direkt aufeinanderfolgende Münzen gibt, die den Gesamtwert 15€ haben.
Teilt man die Reihe der 20 Münzen in zwei Blöcke mit je zehn nebeneinander liegenden Münzen und enthält zufällig jeder Block schon zehn Münzen im Gesamtwert von 15€, so ist man fertig.
Enthält ein Block zehn Münzen mit einem Gesamtwert kleiner als 15€, dann enthält der andere Block mit Sicherheit zehn Münzen mit einem Gesamtwert von mehr als 15€, da der Gesamtwert aller zwanzig Münzen 30€ beträgt.
Der Zehnerblock mit einem Gesamtwert kleiner als 15€ wird Block A genannt, der andere wird Block B genannt.
Legt man nun einen Rahmen auf Block A und verschiebt diesen Rahmen um eine Münze in Richtung von Block B, können die folgenden Fälle auftreten:

1) Eine 1 – €-Münze verschwindet aus dem Rahmen und eine 1 – €-Münze kommt hinzu. Der Gesamtwert der Münzen ändert sich nicht.

2) Eine 2 – €-Münze verschwindet aus dem Rahmen und eine 2 – €-Münze kommt hinzu. Der Gesamtwert der Münzen ändert sich nicht.

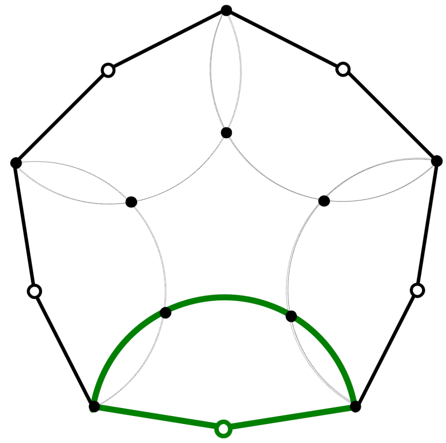
3) Eine 1 – €-Münze verschwindet aus dem Rahmen und eine 2 – €-Münze kommt hinzu. Der Gesamtwert der Münzen erhöht sich um 1€.

4) Eine 2 – €-Münze verschwindet aus dem Rahmen und eine 1 – €-Münze kommt hinzu. Der Gesamtwert der Münzen verringert sich um 1€.

Die Gesamtwert der Münzen ändert sich bei dieser Verschiebung also höchstens um 1€.
Da der Gesamtwert der Münzen in Block A kleiner 15€ und in Block B größer als 15€ ist und sich der Gesamtwert der Münzen bei einer Verschiebung um höchstens 1€ ändert, muss bei fortgesetzter Verschiebung des Rahmens hin auf Block B mindestens einmal eine Menge von zehn Münzen mit einem Gesamtwert von 15€ im Rahmen erscheinen.
Diese Menge besteht aus fünf 1 – €-Münzen und fünf 2 – €-Münzen.

Aufgabe 4

In der nebenstehenden Figur bilden die Radien von fünf kongruenten Kreissektoren ein Zehneck. (Ein solcher Sektor ist in der Figur hervorgehoben.) Dabei wird jeder Kreisbogen durch den Schnitt mit seinen Nachbarbögen in jeweils drei gleich lange Teilbögen geteilt.
Bestimme die Größen der Innenwinkel des Zehnecks.

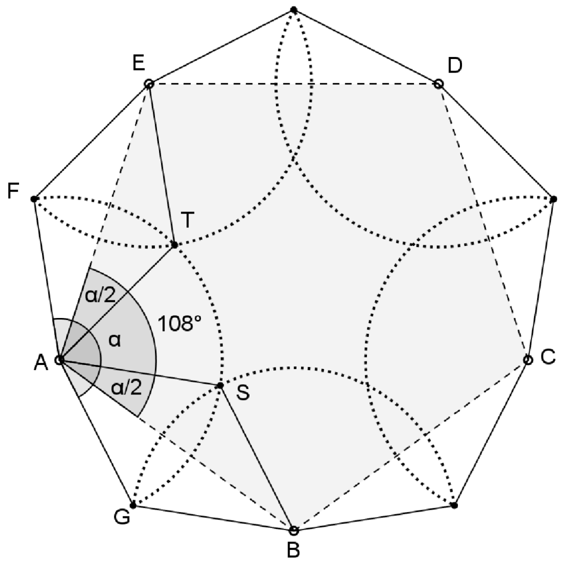


Lösung:

Das Zehneck hat zwei verschiedene Innenwinkelgrößen. An den 5 Mittelpunkten der Kreissektoren beträgt die Winkelgröße 162°, an den verbleibenden 5 Eckpunkten beträgt die Winkelgröße 126°.

1. Beweis (Erkennen eines regelmäßigen Fünfecks und von Rauten):

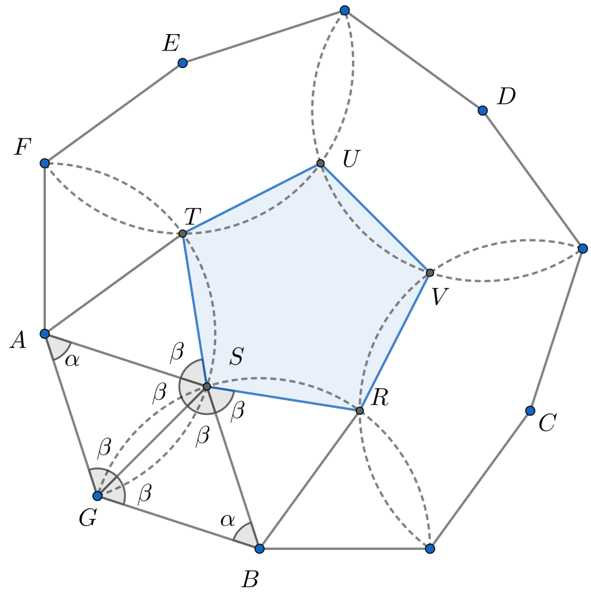
Da nach Voraussetzung die fünf Kreisbögen kongruent sind und jeder Kreisbogen von seinen Nachbarbögen in jeweils drei gleich lange Teilbögen geteilt wird, gelten die im Weiteren am Kreisbogen GF mit Mittelpunkt A und seinen Nachbarbögen durchgeführten Überlegungen analog auch für die anderen Kreisbögen.
Insbesondere zeigen wir, dass die Mittelpunkte A, B, C, D und E der kongruenten Kreisbögen ein regelmäßiges Fünfeck bilden.



Da nach Voraussetzung die Teilbögen TF, ST und GS gleich lang sind, sind die zugehörigen Mittelpunktswinkel gleich groß. Wir bezeichnen seine Größe mit α, d.h. $\angle TAF = \angle SAT = \angle GAS = \alpha$.
Da alle acht Seiten der Vierecke $ATEF$ und $AGBS$ gleich große Radien kongruenter Kreissektoren sind, handelt es sich bei diesen Vierecken um Rauten. Deren Diagonalen AE bzw. AB halbieren die Winkel $\angle TAF = \alpha$ bzw. $\angle GAS = \alpha$. Daher gilt $\angle TAE = \angle BAT = \alpha/2$.
Der Winkel $\angle BAE = \angle BAT + \angle SAT + \angle TAE$ hat also die Größe $\alpha/2 + \alpha + \alpha/2 = 2\alpha$.
Die gleichen Überlegungen gelten für alle 5 Innenwinkel des Fünfecks $ABCDE$. Ebenso sind die Seitenlängen dieses Fünfecks alle gleich lang, nämlich gleich der Länge der Diagonale der Raute $ATEF$. Also ist das Fünfeck $ABCDE$ tatsächlich regelmäßig und jeder Innenwinkel hat die Größe $(5-2) \cdot 180° : 5 = 108°$.

Folglich gilt: $2\alpha = 108°$, d.h. $\alpha = 54°$.
Das betrachtete Zehneck besitzt also fünf zu $\angle GAF$ kongruente Winkel mit der Größe $3\alpha = 162°$.
Da es sich beim Viereck $ATEF$ um eine Raute handelt, ist $\angle AFE = 180° - \alpha = 126°$. Die restlichen 5 Innenwinkel des betrachtetetn Zehnecks sind alle kongruent zu $\angle AFE$ und haben daher alle die Größe 126°.

Variante 1:



Der Kreisbogen GF mit Mittelpunkt A wird in drei gleich lange Teilbögen zerlegt. Daher sind die drei entstehenden Mittelpunktswinkel $\angle TAF$, $\angle SAT$ und $\angle GAS$ gleich groß - ihre Größe bezeichnen wir mit α.
Da die Strecken $\overline{AG}$, $\overline{AS}$, $\overline{AT}$ und $\overline{AF}$ allesamt Radien des gleichen Kreisbogens sind, sind die Dreiecke $\triangle AGS$, $\triangle AST$ und $\triangle ATF$ nach dem Kongruenzsatz (SWS) kongruent und darüberhinaus alle gleichschenklig.
Daher sind die Winkel $\angle SGA$, $\angle ASG$ und $\angle TSA$ gleich groß - ihre Größe bezeichnen wir mit β.

Die gleichen Überlegungen gelten in allen fünf kongruenten Kreisbögen mit den Mittelpunkten A, B, C, D und E. Insbesondere sind daher die Seiten des Fünfecks $RSTUV$ alle gleich lang.
Ebenso sind alle Innenwinkel dieses Fünfecks gleich groß, wie man am Vollwinkel um den Punkt S erkennt gleich $360° - 4\beta$. Das Fünfeck $RSTUV$ ist also regelmäßig.
Da der Innenwinkel im regelmäßigen Fünfeck eine Größe von $(5-2) \cdot 180° : 5 = 108°$ beitzt, folgt

$$360° - 4\beta = 108° .$$

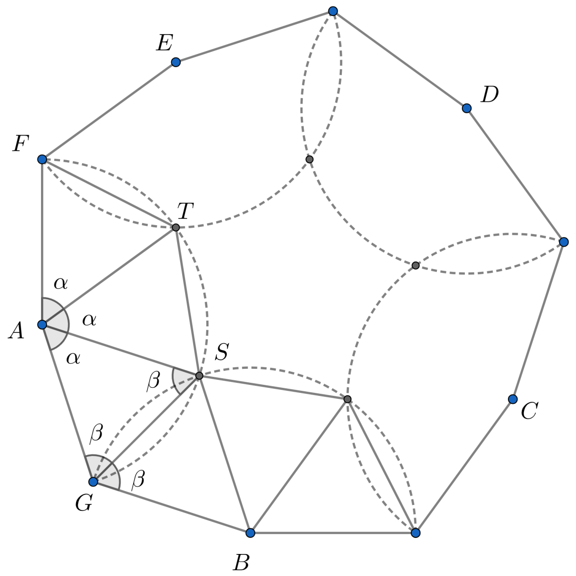
Auflösen nach β ergibt $\beta = 63°$.
Den Winkel α kann man z.B. im Dreieck $\triangle AGS$ berechnen. Da die Summe der Innenwinkel im Dreieck $^{8}0°$ beträgt, folgt

$$\alpha + 2\beta = 180° .$$

Für α folgt: $\alpha = \frac{1}{2}(180° - 2 \cdot 63°) = 54°$.
Damit können wir die Innenwinkel des 10-Ecks berechnen:
An den Mittelpunkten der kongruenten Kreisbögen erhalten wir $3 \cdot \alpha = 3 \cdot 54° = 162°$.
An den verbleibenden 5 Eckpunkten hat der Innenwinkel eine Größe von $2 \cdot \beta = 2 \cdot 62° = 126°$.

2. Beweis (Nutzen der Innenwinkelsumme im Zehneck):

Der Kreisbogen GF mit Mittelpunkt A wird in drei gleich lange Teilbögen zerlegt. Daher sind die drei entstehenden Mittelpunktswinkel $\angle TAF$, $\angle SAT$ und $\angle GAS$ gleich groß - ihre Größe bezeichnen wir mit α.
Da die Strecken $\overline{AG}$, $\overline{AS}$, $\overline{AT}$ und $\overline{AF}$ allesamt Radien des gleichen Kreisbogens sind, sind die Dreiecke $\triangle AGS$, $\triangle AST$ und $\triangle ATF$ nach dem Kongruenzsatz (SWS) kongruent und darüberhinaus alle gleichschenklig.
Daher sind die Winkel $\angle SGA$ und $\angle ASG$ gleich groß - ihre Größe bezeichnen wir mit β.



Die gleichen Überlegungen gelten in allen fünf kongruenten Kreisbögen mit den Mittelpunkten A, B, C, D und E. Insbesondere ist daher die Größe des Winkels $\angle BGS$ ebenfalls gleich β.
Außerdem folgt, dass an den Mittelpunkten der Kreissektoren der Innenwinkel des 10-Ecks immer die Größe $3 \cdot \alpha$ hat, an den restlichen 5 Eckpunkten hingegen $2 \cdot \beta$.
Die Innenwinkelsumme in einem konvexen 10-Eck beträgt

$$(10 - 2) \cdot 180° = 1440° .$$

Daher ergibt sich die Gleichung

$$5 \cdot (3\alpha) + 5 \cdot (2\beta) = 15\alpha + 10\beta = 1440° . \qquad \text{(I)}$$

Im Dreieck $\triangle AGS$ gilt aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck

$$\alpha + 2 \cdot \beta = 180° . \qquad \text{(II)}$$

Das erlaubt uns, α und β zu berechnen: Wir lösen Gleichung (II) nach α auf und setzen das in Gleichung (I) ein.

$$\begin{aligned} \alpha &= 180° - 2 \cdot \beta && \text{(III)} \\ 15(180° - 2\beta) + 10\beta &= 1440° && \mid -1440° + 20\beta \\ 1260° &= 20\beta && \mid : 20 \\ 63° &= \beta \end{aligned}$$

Mit Gleichung (III) folgt dann $\alpha = 54°$.
Für die Innenwinkel des 10-Ecks folgt schließlich $3 \cdot \alpha = 3 \cdot 54° = 162°$ und $2 \cdot \beta = 2 \cdot 63° = 126°$.

Aufgabe 5

Bestimme alle positiven ganzen Zahlen a, b und c, die die Gleichungen

$$\frac{2 \cdot a}{2 + a} = \frac{3 \cdot b}{3 + b} = \frac{4 \cdot c}{4 + c}$$

erfüllen.

Lösung:

Es gibt genau eine Lösung: $a = 12$, $b = 4$ und $c = 3$.

1. Beweis (Arbeiten mit Ungleichungen):

Wir beweisen zuerst durch äquivalente Umformungen, dass $\frac{2 \cdot a}{2+a} < 2$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &< 4 && \mid + 2 \cdot a \\ 2 \cdot a &< 4 + 2 \cdot a = 2 \cdot (2 + a) && \mid : (2 + a) \\ \frac{2 \cdot a}{2 + a} &< 2\,. \end{aligned}$$

Die Division durch $(2 + a)$ war eine Äquivalenzumformung, da $(2 + a)$ für positive Zahlen a selbst positiv ist.
Damit wissen wir insbesondere, dass auch $\frac{4 \cdot c}{4+c} < 2$ gelten muss. Diese Ungleichung formen wir nun (unter Beachtung von $(4 + c) > 0$) ebenfalls äquivalent um:

$$\begin{aligned} \frac{4 \cdot c}{4 + c} &< 2 && \mid \cdot (4 + c) \\ 4 \cdot c &< 2 \cdot (4 + c) = 8 + 2 \cdot c && \mid - 2 \cdot c \\ 2 \cdot c &< 8 && \mid : 2 \\ c &< 4\,. \end{aligned}$$

Da c eine positive ganze Zahl sein soll, kann nur $c = 1$, $c = 2$ oder $c = 3$ gelten. Diese Möglichkeiten werden nun untersucht.

$c = 1$ Es folgt $\frac{4 \cdot c}{4+c} = \frac{4}{5}$ und damit auch $\frac{2 \cdot a}{2+a} = \frac{4}{5}$, was nacheinander zu $10a = 8 + 4a$ und $a = \frac{4}{3}$ führt. In diesem Fall wäre a also keine ganze Zahl und wir erhalten keine Lösung.

$c = 2$ Es folgt $\frac{4 \cdot c}{4+c} = \frac{4}{3}$ und damit auch $\frac{3 \cdot b}{3+b} = \frac{4}{3}$, was nacheinander zu $9b = 12 + 4ba$ und $b = \frac{12}{5}$ führt. In diesem Fall wäre b also keine ganze Zahl und wir erhalten keine Lösung.

$c = 3$ Es folgt $\frac{4 \cdot c}{4+c} = \frac{12}{7}$ und damit auch $\frac{2 \cdot a}{2+a} = \frac{12}{7}$, was nacheinander zu $14a = 24 + 12a$ und $a = 12$ führt.
Die Gleichung $\frac{3 \cdot b}{3+b} = \frac{12}{7}$ führt auf $21b = 36 + 12ba$ und $b = 4$. In diesem Fall sind a und b beide ganze Zahlen und wir erhalten Lösung.

Da alle Umformungen zur Ermittlung von a und b im Fall $c = 3$ äuivalent waren, erfüllen die Zahlen $a = 12$, $b = 4$ und $c = 3$ tatsächlich die Gleichungen der Aufgabenstellung.

Variante1:

Die Bedingung $c < 4$ können wir auch anders erhalten. Wir starten mit der Gleichung

$$\frac{2 \cdot a}{2 + a} = \frac{4 \cdot c}{4 + c},$$

multiplizieren mit den Nennern und erhalten $8a + 2ac = 8c + 4ac$. Subtraktion von $4ac$ führt zu $8a - 2ac = 8c$. Schließlich klammern wir $2a$ auf der linken Seite aus und erhalten $2a(4 - c) = 8c$.
Auf der rechten Seite der Gleichung steht eine positive Zahl und links das Produkt aus der positiven Zahl $2a$ und der Zahl $4-c$. Diese muss daher auch positiv sein. Wir schließen also, dass c kleiner ist als 4.

Variante2:

Eine weitere Möglichkeit, die Bedingung $c < 4$ herzuleiten, erhält man durch Bilden des Kehrwertes der Gleichung $\frac{2 \cdot a}{2+a} = \frac{4 \cdot c}{4+c}$:

$$\begin{aligned}
\frac{2 + a}{2 \cdot a} &= \frac{4 + c}{4 \cdot c} && \\
\frac{1}{a} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{c} + \frac{1}{4} && \Big| -\frac{1}{4} \\
\frac{1}{a} + \frac{1}{4} &= \frac{1}{c}\,. &&
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist die linke Seite der letzten Gleichung größer als $\frac{1}{4}$. Daher muss c kleiner sein als 4, was wir zeigen wollten.

2. Beweis (Arbeiten mit Teibarkeit):

Wir starten mit der Gleichung

$$\frac{2 \cdot a}{2 + a} = \frac{4 \cdot c}{4 + c},$$

multiplizieren mit den Nennern und formen weiter um:

$$\begin{aligned}
8a + 2ac &= 8c + 4ac && \big| -4ac \\
8a - 2ac &= 8c && \big| :2 \\
4a - ac = a(4 - c) &= 4c && \big| :(4 - c) \\
a &= \frac{4c}{4 - c}\,. &&
\end{aligned}$$

In der dritten Zeile wurde auf der linken Seite a ausgeklammert. Insbesondere folgt, dass $(4 - c)$ eine positive Zahl sein muss, weil die rechte Seite positiv ist.
Der Term $\frac{4c}{4-c}$ muss also gleich der positiven ganzen Zahl a sein. Um das auszunutzen, formen wir den Term um:

$$a = \frac{4c}{4 - c} = \frac{4 \cdot (c - 4) + 16}{4 - c} = -4 + \frac{16}{4 - c}\,.$$

Da sowohl a als auch -4 ganze Zahlen sind, muss auch $\frac{16}{4-c}$ eine ganze Zahl sein. Schließlich folgern wir, dass $(4-c)$ ein Teiler von 16 sein muss. Es bleiben die Fälle $4-c=1$ und $4-c=2$, d.h. $c=3$ und $c=2$, die nun untersucht werden:

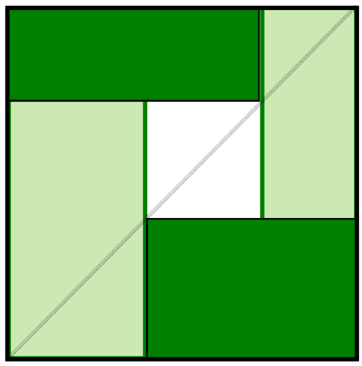
$c=3$ Es folgt $\frac{4\cdot c}{4+c}=\frac{12}{7}$ und damit auch $\frac{2\cdot a}{2+a}=\frac{12}{7}$, was nacheinander zu $14a=24+12a$ und $a=12$ führt.
Die Gleichung $\frac{3\cdot b}{3+b}=\frac{12}{7}$ führt auf $21b=36+12ba$ und $b=4$. In diesem Fall sind a und b beide ganze Zahlen und wir erhalten Lösung.

$c=2$ Es folgt $\frac{4\cdot c}{4+c}=\frac{4}{3}$ und damit auch $\frac{3\cdot b}{3+b}=\frac{4}{3}$, was nacheinander zu $9b=12+4ba$ und $b=\frac{12}{5}$ führt. In diesem Fall wäre b also keine ganze Zahl und wir erhalten keine Lösung.

Da alle Umformungen zur Ermittlung von a und b im Fall $c=3$ äuivalent waren, erfüllen die Zahlen $a=12$, $b=4$ und $c=3$ tatsächlich die Gleichungen der Aufgabenstellung.

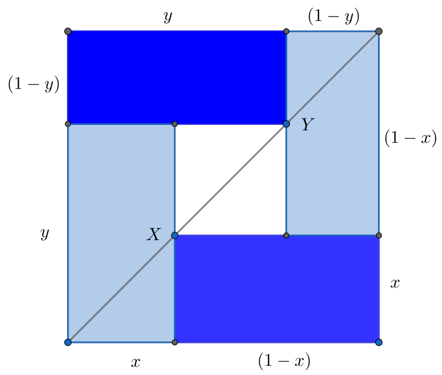
Aufgabe 6

Ein Quadrat kann wie in der Abbildung in ein kleines Quadrat und vier weitere Rechtecke zerlegt werden, wobei eine Diagonale des kleinen Quadrats auf einer Diagonalen des großen Quadrats liegt.
Beweise, dass bei jeder solchen Zerlegung die zwei hell gefärbten Rechtecke zusammen mindestens so groß sind wie die dunkel gefärbten Rechtecke.



1.Beweis (unter Verwendung von Ungleichungen) :

Sei die Seitenlänge des großen Quadrates gleich 1. Wir bezeichnen die Punkte auf der Diagonalen des großen Quadrates mit X und Y, wobei Y weiter rechts als X liegen möge (siehe Skizze). Weiterhin sei die Breite des linken unteren (hellen) Rechtecks x. Da der Punkte X auf der Diagonalen liegt, ist die Höhe des rechten unteren (dunklen) Rechtecks ebenfalls x. Da die Seitenlänge des Quadrates gleich 1 ist, hat die Breite des rechten unteren Rechtecks die Länge $(1-x)$.



Die Breite des linken oberen (dunklen) Rechtecks sei mit y bezeichnet. Die Breite des rechten oberen (hellen) Rechtecks ist dann gleich $(1-y)$. Da der Punkte Y auf der Diagonalen des Quadrates liegt, ist $(1-y)$ auch die Höhe des linken oberen Rechtecks. Alle weiteren Abmessungen der Rechtecke folgen dann direkt und sind in der Skizze eingetragen.
Augrund der Lage von X und Y ist $0<x<y<1$.
Unter dieser Voraussetzung ist also zu zeigen, dass der Flächeninhalt der dunklen Rechtecke kleiner oder gleich dem Flächeninhalt der hellen Rechtecke ist, in Formeln:

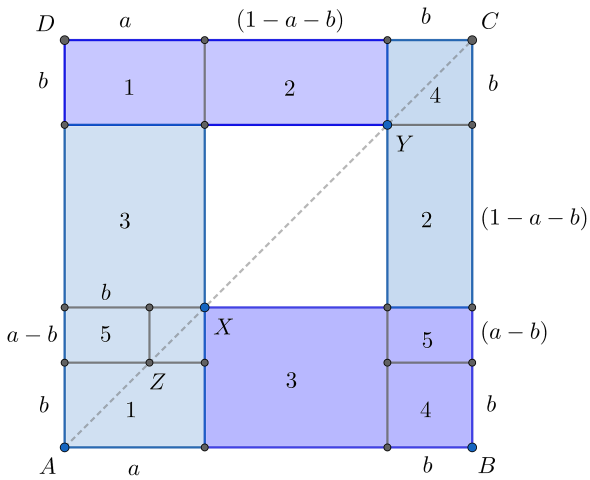
$$(1-x)x+y(1-y)\leq xy+(1-y)(1-x)\,.$$

Wir formen diese Ungleichung nun *äquivalent* um und werden eine wahre Aussage erhalten, was unsere Behauptung beweist.

$$\begin{aligned}(1-x)x+y(1-y) &\le xy+(1-y)(1-x) && |\text{Ausmultiplizieren}\\ x-x^2+y-y^2 &\le xy+1-x-y+xy && |+x^2+y^2-x-y\\ 0 &\le x^2+2xy+y^2-2x-2y+1 && |\text{Zusammenfassen}\\ 0 &\le (x+y)^2-2(x+y)\cdot 1+1^2=(x+y-1)^2\,. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist offensichtlich richtig, weil das Quadrat der reellen Zahl $x+y-1$ immer nichtnegativ ist.
Damit haben wir die Behauptung bewiesen.

2.Beweis (durch Zerlegung in paarweise kongruente Flächen) :



Das Quadrat $ABCD$ habe die Seitenlänge 1. Wir bezeichnen die Punkte auf der Diagonalen $\overline{AC}$ mit X und Y, sodass A näher an X liegt als an Y. X habe den Abstand a von den Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AD}$ und Y den Abstand b von den Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$ (siehe Skizze).
Weiterhin können wir die Bezeichnungen des Quadrates so wählen, dass $a \ge b$ gilt (andernfalls drehen wir das Quadrat um 180°).
Wir zeichnen einen weiteren Punkt Z auf der Diagonalen des Quadrates ein, der den Abstand b von den Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AD}$ hat.
Durch den Punkt Z werden Parallelen zu den Quadratseiten eingezeichnet, ebenso werden die Seiten des kleinen Quadrates (mit den Eckpunkten X und Y) verlängert. So werden die hell und dunkel gefärbten Rechtecke in kleinere Rechtecke zerlegt, die in der Skizze jeweils mit 1 bis 5 bezeichnet sind.
Die Seitenlängen der entstehenden Rechtecke sind in der Skizze ablesbar:

1 Beide Rechtecke haben die Seitenlängen a und b und haben daher den gleichen Flächeninhalt.

2 Beide Rechtecke haben die Seitenlängen b und $1-a-b$ und haben daher den gleichen Flächeninhalt.

3 Beide Rechtecke haben die Seitenlängen a und $1-a-b$ und haben daher den gleichen Flächeninhalt.

4 Beide Quadrate haben die Seitenlänge b und haben daher den gleichen Flächeninhalt.

5 Beide Rechtecke haben die Seitenlängen b und $a-b$ und haben daher den gleichen Flächeninhalt.

Mit diesen 5 Rechtecken wird die dunkel gefärbte Fläche vollständig ausgefüllt. Falls $a \neq b$ ist, bleibt in der hell gefärbten Fläche ein kleines Quadrat (zu dessen Eckpunkten X und Z gehören) übrig.
Folglich hat die hell gefärbte Fläche einen mindestens so großen Flächeninhalt wie die dunkel gefärbte Fläche. Das war zu beweisen.