Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg
Musterlösungen 1. Runde 2007

Aufgabe 1

Günter bastelt Würfel. Jede Seitenfläche färbt er entweder grün oder rot.
Wie viele Würfel, die sich allein durch ihre Färbung unterscheiden, kann Günter herstellen?

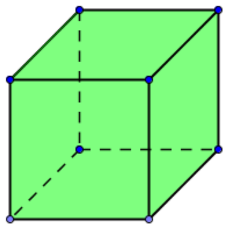
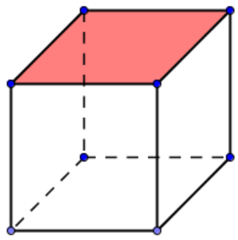
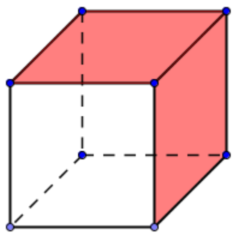
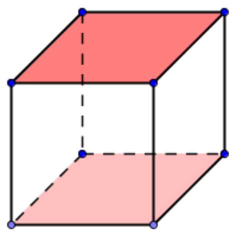
Lösung:

Günter kann **zehn** unterschiedlich gefärbte Würfel herstellen.

Beweis:

Es wird vorausgesetzt, dass die Quadrate, die den Würfel begrenzen, außer durch die Farbe nicht unterscheidbar sind.

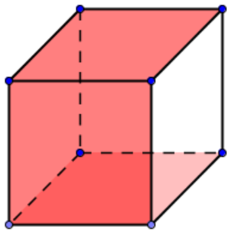
Wir sortieren die möglichen Würfel nach der Anzahl der roten Quadrate. In den Zeichnungen wurde der Übersicht halber nur eine Farbe eingezeichnet, alle nicht gefärbten Flächen sind mit der jeweils anderen Farbe gefärbt.

1. **Keine** Würfelfläche ist rot gefärbt. Es gibt nur **eine** mögliche Färbung. Bei dieser Färbung sind alle Würfelflächen grün.	
2. Genau **eine** Würfelfläche ist rot gefärbt. Es gibt **eine** mögliche Färbung. Bei dieser Färbung werden eine Fläche rot und fünf Flächen grün gefärbt (die grünen Flächen sind nicht eingezeichnet). Da die Würfelflächen ununterscheidbar sind, spielt es keine Rolle, welche der sechs Würfelflächen rot gefärbt wird.	
3. Genau **zwei** Würfelflächen sind rot gefärbt. Dies ist auf **zwei** verschiedene Arten möglich. a) Die beiden rot gefärbten Würfelflächen können sich auf benachbarten Würfelflächen befinden (die beiden Flächen besitzen also eine gemeinsame Kante). Da die Würfelflächen ununterscheidbar sind, spielt es keine Rolle, welche beiden benachbarten Würfelflächen rot gefärbt sind. b) Die beiden rot gefärbten Würfelflächen können sich auf gegenüberliegenden Würfelflächen befinden. Weitere Möglichkeiten für Würfel mit genau zwei roten Flächen gibt es nicht.	 

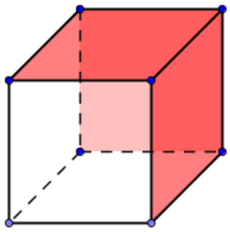
4. Genau **drei** Würfelflächen sind rot gefärbt.

Auch hier sind **zwei** verschiedene Färbungen möglich.

a) Zwei gegenüberliegende Würfelflächen sind rot gefärbt. Dann liegt die dritte rote Würfelfläche dazwischen und die drei rot gefärbten Flächen bilden ein zusammenhängendes Band.



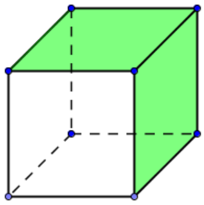
b) Keine zwei gegenüberliegenden Würfelflächen sind rot gefärbt. Dann müssen die drei rot gefärbten Würfelflächen an einer Ecke zusammenstoßen.

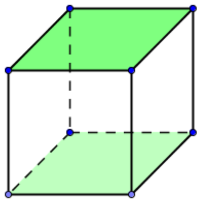


Weitere Möglichkeiten für Würfel mit genau drei roten Flächen gibt es nicht.

5. Genau **vier** Würfelflächen sind rot gefärbt.

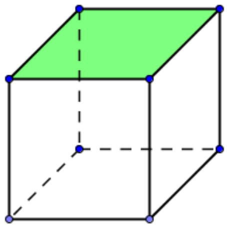
Dann sind genau zwei Würfelflächen grün gefärbt.
Wie bei 3. sind genau **zwei** verschiedene Färbungen möglich.





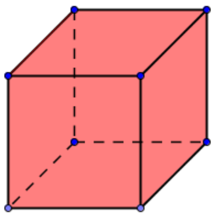
6. Genau **fünf** Würfelflächen sind rot gefärbt.

Dann ist genau eine Würfelfläche grün gefärbt. Wie bei 2. ist genau **eine** Färbung möglich.



7. Genau **sechs** Würfelflächen sind rot gefärbt.

Dann ist keine Würfelfläche grün gefärbt. Wie bei 1. ist genau **eine** Färbung möglich.
Bei dieser Färbung sind alle Flächen rot gefärbt.

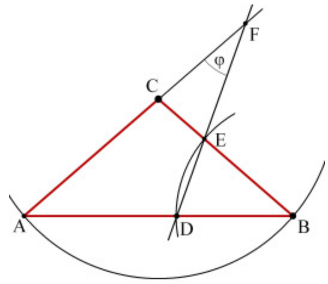


Insgesamt kann Günter also 1+1+2+2+2+1+1 = 10 unterschiedliche Färbungen herstellen.
Die Ergebnisse werden in der Tabelle noch einmal zusammengefasst:

Nr.	Anzahl rote Würfelflächen	Anzahl grüne Würfelflächen	Anzahl der möglichen Färbungen
1	**0**	**6**	**1**
2	**1**	**5**	**1**
3	**2**	**4**	**2**
4	**3**	**3**	**2**
5	**4**	**2**	**2**
6	**5**	**1**	**1**
7	**6**	**0**	**1**
		Summe:	**10**

Aufgabe 2

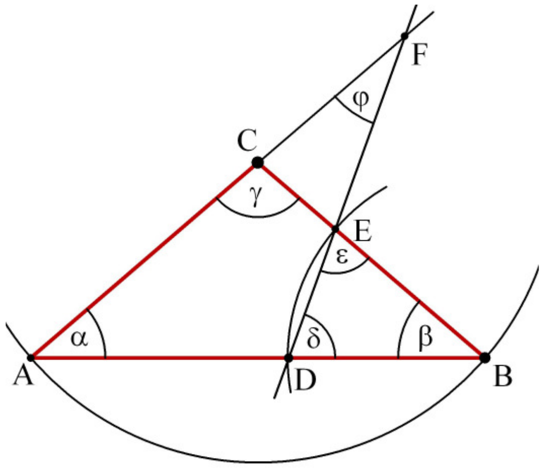
Wie groß sind die Innenwinkel des Dreiecks ABC, wenn $\varphi = 12°$ ist?



Lösung:

$\alpha = \beta = 52°$ und $\gamma = 76°$.

1. Beweisvorschlag:



Da die Punkte *A* und *B* auf einem Kreis mit Mittelpunkt *C* liegen, ist $\overline{AC} = \overline{BC}$. Somit ist das Dreieck *ABC* gleichschenklig mit Basis *AB*. Daher sind die beiden Basiswinkel dieses Dreiecks gleich weit, also

$\alpha = \beta$. **(1)**

Da die Punkte *D* und *E* auf einem Kreis mit Mittelpunkt *B* liegen, ist $\overline{DB} = \overline{EB}$. Somit ist das Dreieck *DBE* gleichschenklig mit Basis *DE*. Daher sind die Basiswinkel gleich weit, also

$\delta = \varepsilon$. **(2)**

Die Winkelsumme für das Dreieck *BED* ist nach (1) und (2): $\beta + \delta + \varepsilon = \alpha + 2\delta = 180°$.

Somit ist $\delta = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Da $\sphericalangle EDA$ Nebenwinkelwinkel von δ ist , ergibt sich daraus

$$\sphericalangle EDA = 180° - \delta = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

Die Winkelsumme für Dreieck *ADF* ist $\alpha + \sphericalangle EDA + \varphi = \alpha + \left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) + \varphi = \frac{3}{2}\alpha + 90° + \varphi = 180°$.

Somit ergibt sich aus der Voraussetzung $\varphi = 12°$: $\frac{3}{2}\alpha = 90° - \varphi = 78°$ oder $\alpha = \frac{2}{3} \cdot 78° = 52° = \beta$.

Aus dem Winkelsummensatz für das Dreieck *ABC* ergibt sich schließlich $\gamma = 180° - 2\alpha = 180° - 2 \cdot 52° = 180° - 104° = 76°$. Damit sind alle Innenwinkel berechnet.

2. Beweisvorschlag:

Wie im 1. Beweisvorschlag erkennt man $\alpha = \beta$ und $\delta = \varepsilon$ (s. (1) und (2)).

Der Winkelsummensatz für das Dreieck *DBE* ergibt $\varepsilon = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$. (*)

Der Winkelsummensatz für das Dreieck *ABC* ergibt $180° - \gamma = \alpha + \beta = 2\alpha$. (**)

$\sphericalangle FEC$ ist Scheitelwinkel zu ε, also $\sphericalangle FEC = \varepsilon$.

$\sphericalangle ECF$ ist Nebenwinkel zu γ, also $\sphericalangle ECF = 180° - \gamma$.

Der Winkelsummensatz für das Dreieck *CEF* ergibt nun $\varepsilon + (180° - \gamma) + \varphi = 180°$. Aus $\varphi = 12°$, (*) und (**) folgt $\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) + 2\alpha = 168°$. Somit folgt $\frac{3}{2}\alpha = 78°$ oder $\alpha = 52° = \beta$.

Aus (**) ergibt sich nun $\gamma = 180° - 2\alpha = 76°$. Alle Innenwinkel sind berechnet.

Aufgabe 3

Zwölf Teilnehmer eines Song-Wettbewerbs werden von einer siebenköpfigen Jury bewertet. Jeder Wertungsrichter gibt jedem Teilnehmer zwischen 1 und 12 Punkte; dabei darf er keine zwei Teilnehmer gleich bewerten. Wer die höchste Gesamtpunktzahl erhält, belegt – evtl. zusammen mit weiteren Teilnehmern – den 1. Platz.

Sänger Mike erfährt von einem Reporter seine Gesamtpunktzahl und gibt dazu den sachlich richtigen Kommentar: „Es ist durchaus möglich, dass ich der alleinige Sieger bin."

Bestimme die kleinste Gesamtpunktzahl, mit der Mike als einziger den 1. Platz belegen kann.

Lösung:

Die kleinste Gesamtpunktzahl, mit der ein Teilnehmer noch als einziger den 1. Platz belegen kann, beträgt 47.

1. Beweisvorschlag:

Jeder der sieben Juroren vergibt 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = 78 Punkte. Insgesamt werden also $7 \cdot 78 = 546$ Punkte auf die 12 Teilnehmer vergeben. (*)

Es ist $546 : 12 = 45{,}5$. Es muss also einen Sänger oder eine Sängerin mit mindestens 46 Punkten geben: Hätten *alle* Sänger nur 45 oder weniger Punkte, so hätten die Teilnehmer insgesamt höchstens $45 \cdot 12 = 540$ Punkte erhalten. Das widerspricht (*), mindestens ein Sänger hat also 46 oder mehr Punkte erhalten.

Einen *alleinigen* Sieger mit genau 46 Punkten kann es aber nicht geben. Denn sonst hätten ja die anderen 11 Teilnehmer höchstens 45 Punkte, die Gesamtzahl aller vergebenen Punkte wäre also höchstens $46 + 11 \cdot 45 = 541$. Das steht im Widerspruch zu (*).

Ein Gewinner des Wettbewerbs, der als einziger den 1. Platz belegt, muss also mindestens 47 Punkte aufweisen. Wenn ein Teilnehmer mit 47 Punkten alleiniger Sieger ist, so bleiben den übrigen 11 Teilnehmern zusammen 499 Punkte.

Erste mögliche Verteilung:

Da $499 = 7 \cdot 45 + 4 \cdot 46$ ist eine solche Punkteverteilung z.B. dann möglich, wenn 7 Teilnehmer 45 Punkte und 4 Teilnehmer 46 Punkte erhalten Die folgende Tabelle zeigt eine solche Punkteverteilung, bei der Mike mit 47 Punkten alleiniger Sieger ist, während die 4 Teilnehmer B, C, D und J jeweils 46 Punkte und die übrigen 7 Teilnehmer jeweils 45 Punkte erhielten.

	Mike	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**
Juror Nr. 1	6	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12
Juror Nr. 2	6	12	11	10	9	8	7	5	4	3	2	1
Juror Nr. 3	6	1	2	3	4	5	11	8	9	7	10	12
Juror Nr. 4	7	12	11	10	9	8	2	5	4	3	6	1
Juror Nr. 5	6	7	1	2	3	4	5	8	9	10	11	12
Juror Nr. 6	8	6	12	9	7	4	1	10	5	11	2	3
Juror Nr. 7	8	6	7	9	10	11	12	1	5	2	3	4
Summe	**47**	**45**	**46**	**46**	**46**	**45**	**45**	**45**	**45**	**45**	**46**	**45**

Somit ist es möglich, dass ein Teilnehmer mit 47 Punkten alleiniger Sieger wird.

Zweite mögliche Verteilung:

Da auch $499 = 44 + 5 \cdot 45 + 5 \cdot 46$, ist eine solche Punkteverteilung z.B. auch dann möglich, wenn ein Teilnehmer 44 Punkte erhält und 5 Teilnehmer 45 Punkte sowie 5 Teilnehmer 46 Punkte erhalten Die folgende Tabelle zeigt eine solche Punkteverteilung, bei der Mike mit 47 Punkten alleiniger Sieger ist, während Teilnehmer J nur 44 Punkte erreicht hat und die übrigen 10 Teilnehmer je zur Hälfte 45 bzw. 46 Punkte erhielten.

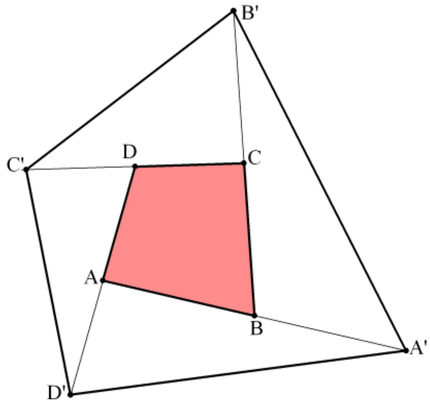
	Mike	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**
Juror Nr. 1	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Juror Nr. 2	1	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Juror Nr. 3	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Juror Nr. 4	1	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Juror Nr. 5	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Juror Nr. 6	1	12	11	8	6	4	2	10	7	9	5	3
Juror Nr. 7	8	6	7	9	10	11	12	2	4	1	3	5
Summe	**47**	**45**	**46**	**46**	**46**	**46**	**46**	**45**	**45**	**45**	**44**	**45**

2. Beweisvorschlag:

Jeder der sieben Juroren vergibt 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = 78 Punkte. Insgesamt werden also $7 \cdot 78 = 546$ Punkte an die 12 Teilnehmer vergeben.
Ist Mike mit n Punkten alleiniger Sieger, so haben alle anderen Sänger höchstens $n-1$ Punkte.
Somit ist die Gesamtpunktzahl höchstens $11 \cdot (n-1) + n = 12n - 11$.
Somit folgt $546 \leq 12n - 11$. Daraus ergibt sich $n \geq 46\frac{5}{12}$. Mike muss also mindestens 47 Pinkte erhalten um alleiniger Sieger zu sein.
Dass Mike mit 47 Punkten tatsächlich alleiniger Sieger sein kann, folgt aus den Verteilungen des 1. Beweisvorschlags.

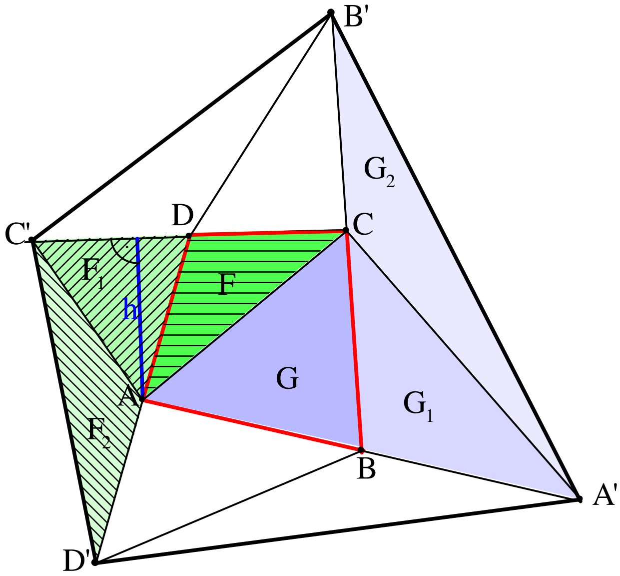
Aufgabe 4

In einem Viereck ABCD sind alle Innenwinkel kleiner als 180°.
Spiegelt man A an B, B an C, C an D und D an A, so entsteht das Viereck A'B'C'D'.
Wie groß ist das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Vierecke?



Lösung: Das Verhältnis der Flächeninhalte von Viereck *ABCD* zu Viereck *A'B'C'D'* ist 1:5.
Die Fläche des Vierecks *ABCD* nimmt also ein Fünftel der Fläche des Vierecks *A'B'C'D'* ein.

1. Beweisvorschlag:



In nebenstehender Zeichnung haben die grün markierten Dreiecke (das sind die *schraffierten* Dreiecke) alle den gleichen Flächeninhalt $F = F_1 = F_2$:

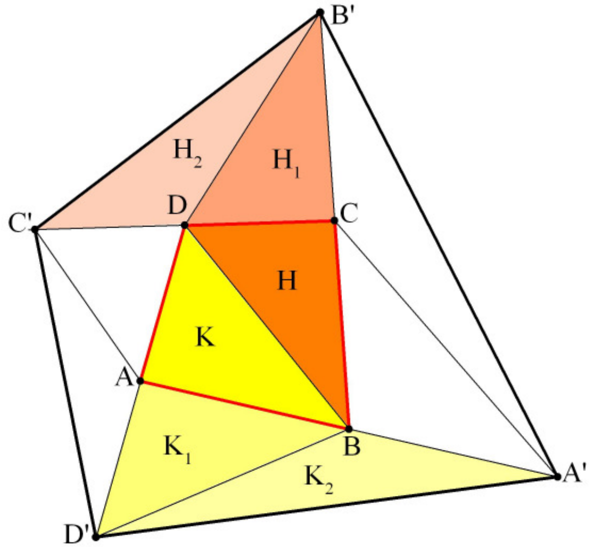
- Die Dreiecke *ACD* und *ADC'* haben denselben Flächeninhalt, denn diese beiden Dreiecke haben nach Konstruktion eine gleich lange Seite $\overline{CD} = \overline{C'D}$ und die gleiche zugehörige Höhe *h*, die orthogonal zur Geraden CC' liegt und durch *A* geht. Bei gleicher Seitenlänge und gleicher Höhe ist aber auch der Flächeninhalt gleich.
- Analog ist $F_1 = F_2$, denn auch die Dreiecke *ADC'* und *D'AC'* haben eine gleich lange Seite $\overline{AD} = \overline{D'A}$ und die gleiche zugehörige Höhe.

Analog haben auch die drei blau markierten Dreiecke den gleichen Flächeninhalt, also $G = G_1 = G_2$.

Für den Flächeninhalt von Viereck *ABCD* gilt dabei offensichtlich: $A(ABCD) = F + G$.

Mit einer analogen Argumentation beweist man, dass $H = H_1 = H_2$ und $K = K_1 = K_2$ ist (vgl. nebenstehende Zeichnung).

Hierbei gilt für den Flächeninhalt von Viereck *ABCD:* $A(ABCD) = H + K$.



Insgesamt gilt also für den Flächeninhalt des großen Vierecks *A'B'C'D'*:

$A(A'B'C'D')$

$= A(ABCD) + 2F + 2G + 2H + 2K$

$= A(ABCD) + 2(F + G) + 2(H + K)$

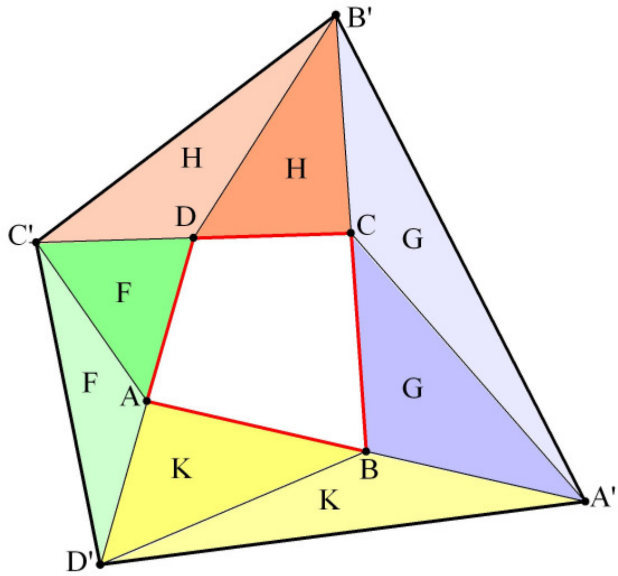
(siehe nebenstehende Zeichnung).

Aus $A(ABCD) = F + G = H + K$ folgt nun

$A(A'B'C'D')$

$= A(ABCD) + 2A(ABCD) + 2A(ABCD)$.

$= 5 \cdot A(ABCD)$

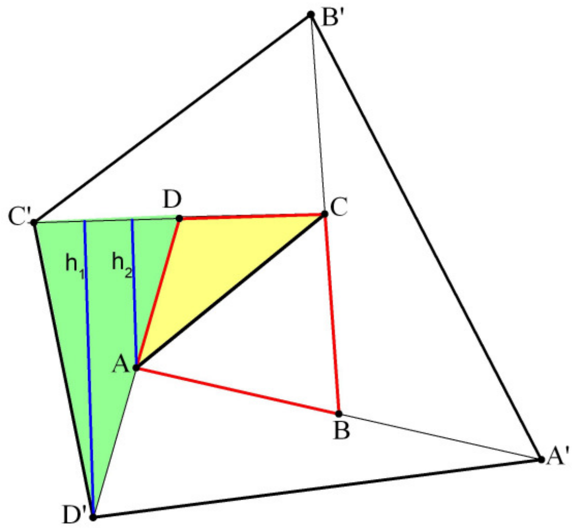


Die Fläche des Vierecks *ABCD* nimmt also ein Fünftel der Fläche des Vierecks *A'B'C'D'* ein.

2. Beweisvorschlag:

Sei h_1 die Höhe des Dreiecks *C'D'D*, h_2 die Höhe des Dreiecks *ACD*. Die Höhen h_1 und h_2 sind parallel. Nach dem Strahlensatz ist also $h_1 = 2 \cdot h_2$, denn $\overline{D'D} = 2 \cdot \overline{AD}$. Da die beiden Dreiecke *ACD* und *C'D'D* gleich lange Grundseiten $\overline{CD}$ bzw. $\overline{C'D}$ haben, hat *C'D'D* den doppelten Flächeninhalt wie *ACD*.

Analog hat *BA'B'* den doppelten Flächeninhalt wie *ABC*, *CB'C'* den doppelten Flächeninhalt wie *BCD*, *AD'A'* den doppelten Flächeninhalt wie *ABD*. Somit haben gegenüberliegende äußere Dreiecke zusammen den doppelten Flächeninhalt wie das innere Viereck. Die vier äußeren Dreiecke haben also zusammen den vierfachen Flächeninhalt wie Viereck *ABCD*.



Damit hat das Viereck *A'B'C'D'* den fünffachen Flächeninhalt wie das Viereck *ABCD*.

Aufgabe 5

Bestimme alle natürlichen Zahlen x und y mit $2x+7y+2007=x\cdot y$.

Lösung:

Es gibt vier Lösungen:

1. $x=8$, $y=2023$

2. $x=50$, $y=49$

3. $x=54$, $y=45$

4. $x=2028$, $y=3$

1. Beweismöglichkeit:

Die Gleichung $2x+7y+2007=x\cdot y$ ist äquivalent zu $2007=x\cdot y-2x-7y$.
In der letzten Gleichung kann man die rechte Seite umformen:

$$x\cdot y-2x-7y=(x-7)\cdot(y-2)-14.$$

Somit erhält man

$$2007=(x-7)\cdot(y-2)-14 \quad \text{oder} \quad 2021=(x-7)\cdot(y-2). \qquad (*)$$

Die Primfaktorzerlegung von 2021 ist $2021=43\cdot 47$. Also sind 1, 43, 47, 2021, -1, -43, -47, -2021 die einzigen ganzen Teiler von 2021. Da $x-7$ nach (*) ein Teiler von 2021 ist, muss $x-7$ eine dieser acht Zahlen sein. Da x eine natürliche Zahl ist, kann $x-7$ nicht -43, -47 oder -2021 sein. Aus $x-7=-1$ folgt $y=-2019<0$, also kann $x-7$ nur eine der Zahlen 1, 43, 47, 2021 sein.

Somit erhält man folgende Fälle:

Fall	$\boldsymbol{x-7}$	$\boldsymbol{y-2=\frac{2021}{x-7}}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
1	1	2021	8	2023
2	43	47	50	49
3	47	43	54	45
4	2021	1	2028	3

Dies sind genau die behaupteten Lösungen.

2. Beweismöglichkeit:

Für $x = 7$ ergibt sich keine Lösung der Gleichung, da $2 \cdot 7 + 7y + 2007 = 7y$ unlösbar ist.
Durch Äquivalenzumformungen ergibt sich aber für $x \neq 7$ aus der Ausgangsgleichung durch Auflösung nach *y*:

$$\begin{aligned} & xy - 2x - 7y = 2007 \\ \Leftrightarrow \quad & xy - 7y = 2007 + 2x \\ \Leftrightarrow \quad & y(x-7) = 2007 + 2x \\ \Leftrightarrow \quad & y = \frac{2007 + 2x}{x-7} \end{aligned}$$

Für eine natürliche Zahl $x < 7$ wäre $\frac{2007 + 2x}{x-7}$ negativ. Dies ist unmöglich, da *y* eine natürliche Zahl ist. Somit folgt $x \geq 8$ und $x - 7$ ist positiv. Durch weitere Umformungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} & y = \frac{2007 + 2x}{x-7} \\ \Leftrightarrow \quad & y = \frac{2007 + 2(x-7) + 14}{x-7} \\ \Leftrightarrow \quad & y = \frac{2021}{x-7} + 2 \end{aligned}$$

Da *y* eine natürliche Zahl ist, muss $x - 7$ ein positiver Teiler von 2021 sein. Die Primfaktorzerlegung von 2021 ist $2021 = 43 \cdot 47$. Also sind 1, 43, 47, 2021 die einzigen positiven Teiler von 2021.Somit muss $x - 7$ eine dieser vier Zahlen sein.

Fall 1: $x - 7 = 1$. Dann ist $x = 8$ und $y = \frac{2021}{x-7} + 2 = 2023$.

Fall 2: $x - 7 = 43$. Dann ist $x = 50$ und $y = \frac{2021}{x-7} + 2 = 49$.

Fall 3: $x - 7 = 47$. Dann ist $x = 54$ und $y = \frac{2021}{x-7} + 2 = 45$.

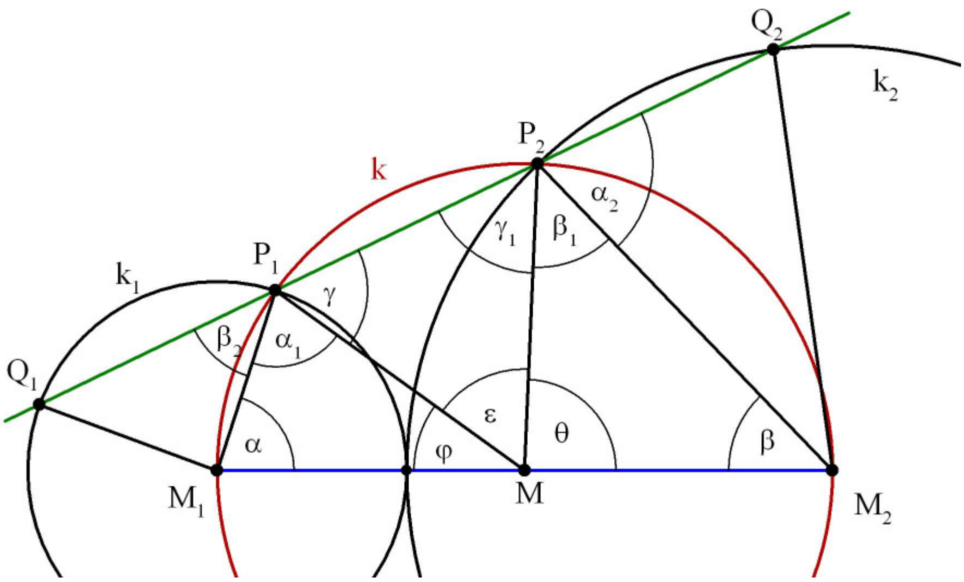
Fall 4: $x - 7 = 2021$. Dann ist $x = 2028$ und $y = \frac{2021}{x-7} + 2 = 3$.

Dies sind genau die behaupteten vier Lösungen.

Aufgabe 6

Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2, die sich von außen berühren. Ihre Mittelpunkte sind M_1 und M_2. Ein Halbkreis über der Strecke $\overline{M_1M_2}$ schneidet k_1 in P_1 und k_2 in P_2.
Zeige: Die Kreise k_1 und k_2 schneiden aus der Geraden P_1P_2 gleich lange Sehnen aus.

1. Beweismöglichkeit: *(Mit Winkelsummensatz und gleichschenkligen Dreiecken)*



In der obigen Zeichnung ist die in der Aufgabe beschriebene Figur dargestellt.

Die Gerade P_1P_2 hat mit dem Kreis k_1 außer P_1 noch einen weiteren Schnittpunkt Q_1
Analog ist Q_2 der zweite Schnittpunkt von P_1P_2 mit k_2. Zu zeigen ist also $\overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2}$.
Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{M_1M_2}$.

Alle Winkel seien so bezeichnet, wie es in der obigen Zeichnung dargestellt ist.

Behauptung: Die Winkel $\alpha = \sphericalangle MM_1P_1$ und $\alpha_2 = \sphericalangle M_2P_2Q_2$ sind gleich weit, also $\alpha = \alpha_2$.

Beweis der Behauptung: Die Dreiecke P_1M_1M und P_2MM_2 sind gleichschenklig, denn jeweils zwei ihrer Seiten sind Kreisradien. Somit sind die Basiswinkel in diesen Dreiecken gleich weit, es gilt also $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \beta_1$.

Aus dem Winkelsummensatz für das Dreieck P_1M_1M ergibt sich nun $\varphi = 180° - 2\alpha$. Analog ist $\theta = 180° - 2\beta$ (Winkelsummensatz für das Dreieck P_2MM_2).

Da auch das Dreieck P_2P_1M gleichschenklig ist, gilt $\gamma = \gamma_1$. Somit ergibt sich aus dem Winkelsummensatz für das Dreieck P_2P_1M:

$$\gamma = \frac{180° - \varepsilon}{2} = \frac{\varphi + \theta}{2} = \frac{(180° - 2\alpha) + (180° - 2\beta)}{2} = 180° - \alpha - \beta .$$

Somit ist $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Da die drei Winkel γ, β und α_2 bei P_2 zusammen einen gestreckten Winkel ergeben, muss $\alpha = \alpha_2$ sein. Das ist die Behauptung.

Die Dreiecke MP_1M_1 und $M_2Q_2P_2$ sind nach dieser Behauptung gleichschenklige Dreiecke mit gleichen Basiswinkeln. Somit stimmen alle Winkel in diesen Dreiecken überein und es handelt sich um ähnliche Dreiecke. Entsprechende Seiten stehen demnach im gleichen Verhältnis zueinander, insbesondere gilt $\frac{\overline{P_2Q_2}}{\overline{M_1P_1}} = \frac{\overline{M_2P_2}}{\overline{MM_1}}$.

Aus $\overline{M_1P_1} = r_1$, $\overline{M_2P_2} = r_2$ und $\overline{MM_1} = \frac{r_1 + r_2}{2}$ folgt somit

$$\overline{P_2Q_2} = \frac{\overline{M_2P_2}}{\overline{MM_1}} \cdot \overline{M_1P_1} = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}. \qquad (*)$$

Analog wie im Beweis der obigen Behauptung erkennt man, dass in der obigen Zeichnung auch $\beta = \beta_2$ gilt.

Die gleichschenkligen Dreiecke MM_2P_2 und $M_1P_1Q_1$ sind also ebenfalls ähnlich zueinander.

Entsprechende Seiten stehen demnach im gleichen Verhältnis, insbesondere gilt $\frac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{M_2P_2}} = \frac{\overline{M_1P_1}}{\overline{MM_2}}$.

Aus $\overline{M_1P_1} = r_1$, $\overline{M_2P_2} = r_2$ und $\overline{MM_2} = \frac{r_1 + r_2}{2}$ folgt somit

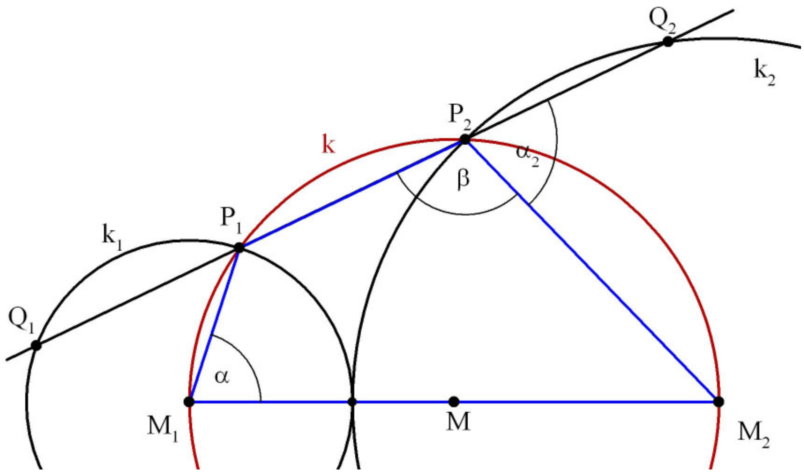
$$\overline{P_1Q_1} = \frac{\overline{M_1P_1}}{\overline{MM_2}} \cdot \overline{M_2P_2} = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}. \qquad (**)$$

Aus den Beziehungen (*) und (**) ergibt sich nun $\overline{P_1Q_1} = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} = \overline{P_2Q_2}$. Das war zu zeigen.

1. Variante der 1. Beweismöglichkeit: *(Mit Sehnenviereck)*

Die Behauptung $\alpha = \alpha_2$ aus der obigen 1. Beweismöglichkeit kann wie folgt kürzer bewiesen werden:

Die Eckpunkte des Vierecks $M_1M_2P_2P_1$ liegen alle auf dem Halbkreis k über der Strecke $\overline{M_1M_2}$. Es handelt sich also um ein Sehnenviereck. In einem Sehnenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Innenwinkel zu 180°. Mit $\beta = \sphericalangle P_1P_2M_2$ gilt also $\alpha + \beta = 180°$.

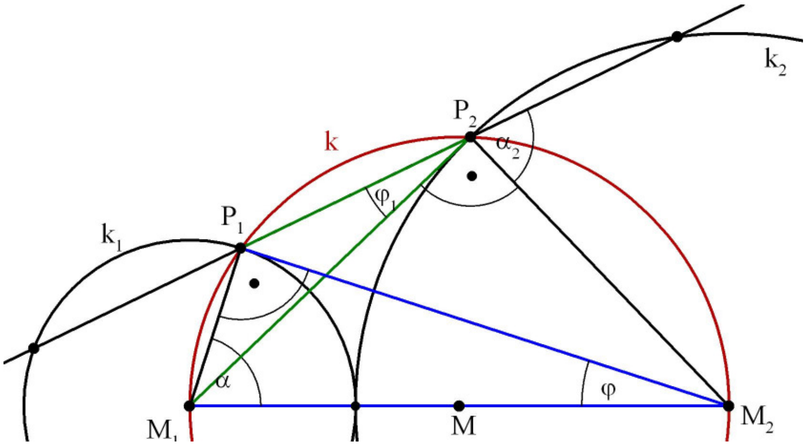


Da α_2 und β Nebenwinkel sind, ist $\alpha_2 = 180° - \beta = \alpha$. Damit ist die Behauptung bewiesen. Der Rest des Beweises bleibt gleich.

2. Variante der 1. Beweismöglichkeit: *(Mit Umfangswinkelsatz)*

Die Behauptung $\alpha = \alpha_2$ aus der obigen 1. Beweismöglichkeit kann aber auch so bewiesen werden:

Die Winkel φ und φ_1 in nebenstehender Zeichnung sind Umfangswinkel zum gleichen Kreisbogen $\overset{\frown}{P_1M_1}$. Nach dem Umfangswinkelsatz ist also $\varphi = \varphi_1$.



Nach dem Satz des Thales ist $\sphericalangle M_1P_1M_2 = 90°$. Der Winkelsummensatz für das Dreieck $M_1M_2P_1$ ergibt also $\alpha = 90° - \varphi$.

Ebenso ist nach dem Satz des Thales $\sphericalangle M_1P_2M_2 = 90°$. Da α_1, $\sphericalangle M_1P_2M_2$ und φ_1 zusammen einen gestreckten Winkel ergeben, folgt $\alpha_1 = 180° - (90° + \varphi_1) = 90° - \varphi_1$.

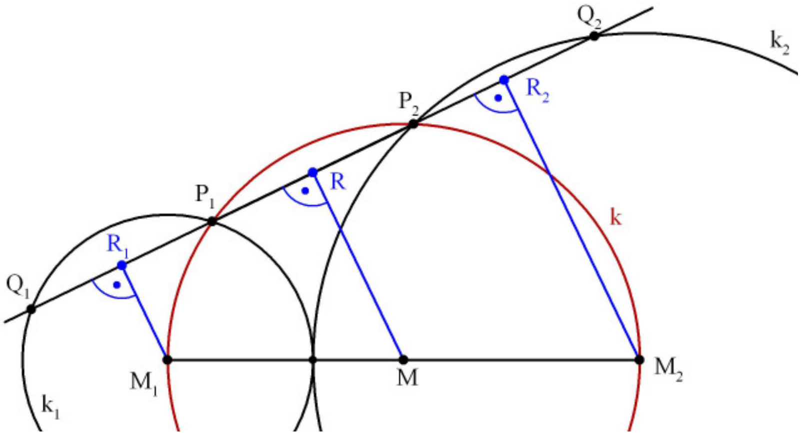
Aus $\alpha = 90° - \varphi$, $\alpha_1 = 90° - \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_1$ ergibt sich nun $\alpha = 90° - \varphi = 90° - \varphi_1 = \alpha_1$.

Damit ist die Behauptung bewiesen. Der Rest des Beweises bleibt gleich.

2. Beweismöglichkeit: *(Mit Streifenschar)*

Die Gerade P_1P_2 hat mit dem Kreis k_1 außer P_1 noch einen weiteren Schnittpunkt Q_1.
Analog ist Q_2 der zweite Schnittpunkt von P_1P_2 mit k_2.

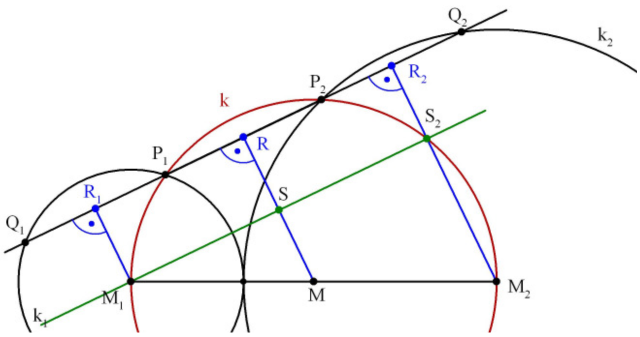
Zu zeigen ist also $\overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2}$.
Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{M_1M_2}$.



Fällt man von M_1, M_2 und M die Lote auf die Gerade P_1P_2, so erhält man die Lotfußpunkte R_1, R_2 und R. Somit entsteht eine Streifenschar, denn die parallelen Geraden M_1R_1, MR und M_2R_2 haben denselben Abstand: Da $\overline{M_1M_2}$ durch die Geraden in zwei gleich lange Strecken $\overline{M_1M}$ und $\overline{MM_2}$ geteilt wird, muss eine Streifenschar vorliegen.

(Dies kann man mit Hilfe der nebenstehenden Zeichnung beweisen:

Die Parallele zu P_1P_2 durch M_1 schneidet MR und M_2R_2 in S bzw. S_2.
Nun ist SM die Mittelparallele im Dreieck $M_1M_2S_2$. Also ist S der Mittelpunkt von $\overline{M_1S_2}$.

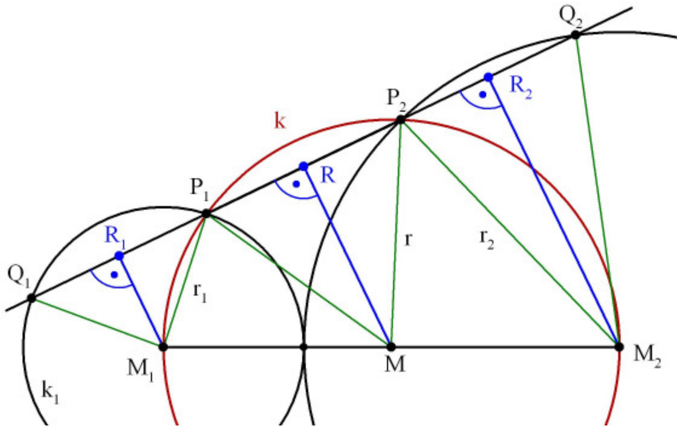


Somit haben die drei Geraden M_1R_1, MR und M_2R_2 denselben Abstand.)

Es folgt unmittelbar, dass R in der Mitte zwischen R_1 und R_2 liegt, d.h. es gilt $\overline{RR_1} = \overline{RR_2}$.

Die Dreiecke $P_1Q_1M_1$, P_2P_1M und $Q_2P_2M_2$ sind gleichschenklig, denn jeweils zwei ihrer Seiten sind Kreisradien.

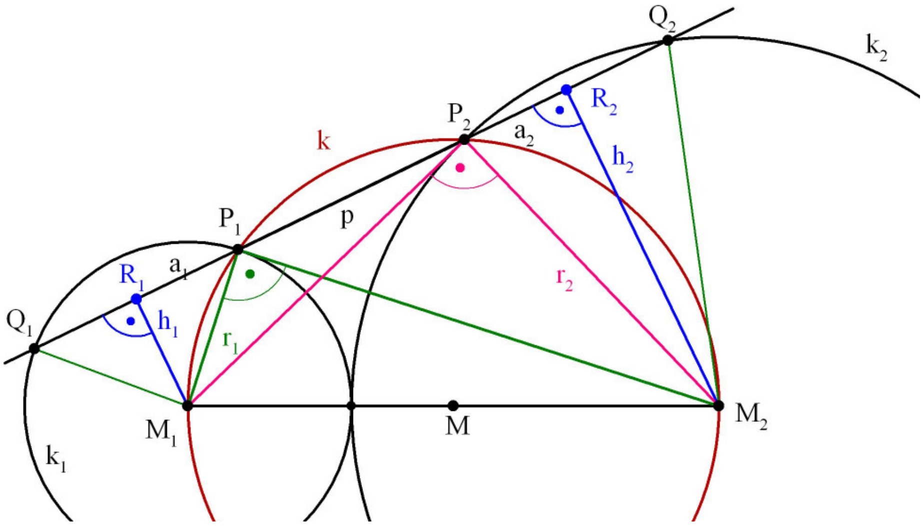
In gleichschenkligen Dreiecken ist die Höhe gleichzeitig auch Seitenhalbierende.
Daher ist R_1 die Mitte von $\overline{P_1Q_1}$, R die Mitte von $\overline{P_1P_2}$ und R_2 die Mitte von $\overline{P_2Q_2}$.



Also gilt: $\overline{P_1Q_1} = 2\cdot\overline{P_1R_1} = 2\cdot(\overline{RR_1} - \overline{RP_1}) = 2\cdot(\overline{RR_2} - \overline{RP_2}) = 2\cdot\overline{P_2R_2} = \overline{P_2Q_2}$. Dies war zu zeigen.

3. Beweismöglichkeit: *(Mit dem Satz des Pythagoras)*

Die Strecken in der Figur seien wie in der nebenstehenden Zeichnung bezeichnet.
Da der Kreis k der Thaleskreis über der Strecke $\overline{M_1M_2}$ ist, sind die Winkel $\sphericalangle M_1P_1M_2$ und $\sphericalangle M_1P_2M_2$ rechte Winkel.



Nach dem Satz des Pythagoras gilt also wegen $\overline{M_1M_2} = r_1 + r_2$:

$\overline{M_1P_2}^2 = (r_1+r_2)^2 - r_2^2 = r_1^2 + 2r_1r_2$ und $\overline{M_2P_1}^2 = (r_1+r_2)^2 - r_1^2 = r_2^2 + 2r_1r_2$.

Damit ergibt sich $h_1^2 = \overline{M_1P_2}^2 - (a_1+p)^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 - (a_1+p)^2$ und

$h_2^2 = \overline{M_2P_1}^2 - (a_2+p)^2 = r_2^2 + 2r_1r_2 - (a_2+p)^2$.

Da außerdem $h_1^2 = r_1^2 - a_1^2$ und $h_2^2 = r_2^2 - a_2^2$ (Pythagoras) folgt nun durch Gleichsetzen:

$r_1^2 - a_1^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 - (a_1+p)^2$, also $2r_1r_2 = p^2 + 2a_1p$.

Analog $r_2^2 - a_2^2 = r_2^2 + 2r_1r_2 - (a_2+p)^2$, also $2r_1r_2 = p^2 + 2a_2p$.

Somit ist $p^2 + 2a_1p = p^2 + 2a_2p$. Daraus ergibt sich $a_1 = a_2$.

Da $a_1 = \frac{\overline{P_1Q_1}}{2}$ und $a_2 = \frac{\overline{P_2Q_2}}{2}$ folgt nun $\overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2}$. Dies war zu zeigen.