# Landeswettbewerb Mathematik
## Baden-Württemberg
### Musterlösungen 1. Runde 2020/2021

***Aufgabe 1***

*Mathelda schreibt an die Tafel fünf verschiedene positive ganze Zahlen, deren Durchschnitt 5 ist. Wenn Mathelda die kleinste und die größte Zahl weglässt, beträgt der Durchschnitt der restlichen Zahlen 4.*

*Welche Zahlen kann Mathelda an die Tafel geschrieben haben? Bestimme alle Möglichkeiten.*

***Lösung:***
Es gibt genau vier Möglichkeiten für die fünf Zahlen, die Mathelda an die Tafel geschrieben haben kann, nämlich:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Möglichkeit 1: | 1, | 2, | 3, | 7, | 12 |
| Möglichkeit 2: | 1, | 2, | 4, | 6, | 12 |
| Möglichkeit 3: | 1, | 3, | 4, | 5, | 12 |
| Möglichkeit 4: | 2, | 3, | 4, | 5, | 11 |

***1. Beweisvorschlag (Fälle für die zweitkleinste Zahl):***
Da alle fünf Zahlen den Durchschnitt 5 haben ist ihre Summe $5 \cdot 5 = 25$.
Der Durchschnitt der drei mittleren Zahlen, die nach Weglassen der kleinsten und der größten Zahl an der Tafel übrig bleiben, ist $4$. Die Summe dieser drei Zahlen ist also $3 \cdot 4 = 12$.
Die Summe der kleinsten und größten Zahl ist also $25 - 12 = 13$.

Die zweitkleinste Zahl an der Tafel muss mindestens 2 sein, da die Zahlen alle verschieden und positiv sind, die zweitkleinste Zahl muss also größer als die kleinste Zahl sein. Daher gibt es folgende Fälle für die zweitkleinste Zahl:

***Fall 1:*** *Die zweitkleinste Zahl ist 2.*
Die Summe aus den beiden nächstgrößeren Zahlen ist dann $12 - 2 = 10$. Es gibt für diese beiden verschiedenen Zahlen also die beiden Möglichkeiten $3$ und $7$ bzw. $4$ und $6$. Die drittkleinste Zahl kann nicht $5$ oder größer sein, da sie sonst mindestens so groß wie die vierte Zahl wäre.
Wenn die zweitkleinste Zahl $2$ ist, so muss die kleinste Zahl $1$ sein, die größte daher $13 - 1 = 12$.
Man erhält also die beiden Möglichkeiten: $1 - 2 - 3 - 7 - 12$ und $1 - 2 - 4 - 6 - 12$. Bei beiden Möglichkeiten ist tatsächlich der Durchschnitt der mittleren Zahlen 4 und der Durchschnitt aller Zahlen $5$.

***Fall 2:*** *Die zweitkleinste Zahl ist gleich 3.*
Die Summe aus den beiden nächstgrößeren Zahlen ist dann $12$ -$3 = 9$. Es gibt für diese beiden verschiedenen Zahlen also nur die Möglichkeit $4$ und $5$.
Wenn die zweitkleinste Zahl $3$ ist, so muss die kleinste Zahl $1$ oder $2$ sein. Wenn sie $1$ ist, so ist die größte Zahl $13-1=12$. Wenn die kleinste Zahl $2$ ist, so ist die größte Zahl $13-2=11$.
Man erhält also die beiden Möglichkeiten: $1-3-4-5-12$ und $2-3-4-5-11$. Bei beiden Möglichkeiten ist wieder offensichtlich der Durchschnitt der mittleren Zahlen $4$ und der Durchschnitt aller Zahlen $5$.

***Fall 3:*** *Die zweitkleinste Zahl ist mindestens 4.*
Dies kann nicht sein, weil die Summe der zweit-, dritt- und viertkleinsten Zahl dann mindestens gleich $4+5+6=15$ wäre, was größer als $12$ ist.

Da die Fallunterscheidung alle Möglichkeiten für die zweitkleinste Zahl abdeckt, hat man alle Möglichkeiten gefunden. Es gibt also genau die vier in der Lösung angegeben Möglichkeiten.

***2. Beweisvorschlag (Untersuchung der kleinsten drei Zahlen):***
Da alle fünf Zahlen den Durchschnitt 5 haben ist ihre Summe $25$.
Der Durchschnitt der drei mittleren Zahlen ist $4$, ihre Summe also $12$.
Die fünf Zahlen werden mit $a, b, c, d$ und $e$ bezeichnet, wobei $a<b<c<d<e$ gelten soll.

Wäre $a \geq 3$, dann wäre $a+b+c+d+e \geq 3+4+5+6+7=25$. Gleichheit kann nur eintreten, wenn die fünf Zahlen genau die Zahlen $3, 4, 5, 6$, und $7$ sind. Dann wäre aber $b+c+d=4+5+6=15>12$, was nicht sein kann.
Also muss $a<3$ gelten, es kann nur $a=1$ oder $a=2$ sein.

Wäre $b \geq 4$, dann wäre $b+c+d \geq 4+5+6>12$, was nicht sein kann.
Also muss $b \leq 3$ sein. Weil zusätzlich $b>a \geq 1$, ist also $b=2$ oder $b=3$.

Wäre $c \geq 5$, dann wäre $b+c+d \geq 2+5+6=13$, was nicht sein kann.
Also muss $c \leq 4$ sein.

Es bleiben nur die folgenden vier Möglichkeiten für die kleinsten drei Zahlen $a; b; c$:
(1) $1; 2; 3$; (2) $1; 2; 4$; (3) $1; 3; 4$; (4) $2; 3; 4$
Ausgehend von $a, b$ und $c$ kann man $d$ und $e$ berechnen: Aus $b+c+d=12$ ergibt sich $d=12-b-c$ und aus $a+b+c+d+e=25$ schließlich $e=25-a-b-c-d$.

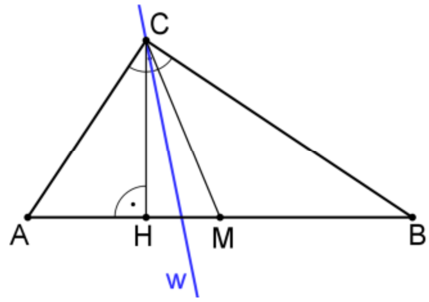
Für (1) ergibt sich $d=12-2-3=7$ und $e=25-1-2-3-7=12$, also Lösungsmöglichkeit 1. Für (2) ergibt sich $d=12-2-4=6$ und $e=25-1-2-4-6=12$, also Lösungsmöglichkeit 2. Für (3) ergibt sich $d=12-3-4=5$ und $e=25-1-3-4-5=12$, also Lösungsmöglichkeit 3. Für (4) ergibt sich $d=12-3-4=5$ und $e=25-2-3-4-5=11$, also Lösungsmöglichkeit 4.

Offensichtlich erfüllen alle vier Lösungen die Aufgabenstellung.

## *Aufgabe 2*

*In der abgebildeten Figur ist M der Mittelpunkt der Strecke AB. Die Gerade w halbiert den rechten Winkel bei C.*

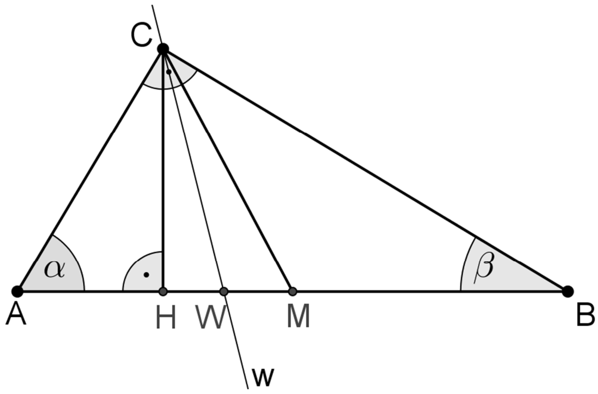
*Beweise: w halbiert auch den Winkel* $\sphericalangle HCM$.




### *1. Beweisvorschlag (über Umkehrung des Satz des Thales):*

***Vorbemerkung:***
Es genügt, die in der abgebildeten Figur gegebene Lage zu betrachten, bei der $\sphericalangle BAC > \sphericalangle CBA$ ist. Dies wird im folgenden vorausgesetzt. Die Aussage der Aufgabe gilt aus Symmetriegründen dann auch für den Fall $\sphericalangle BAC < \sphericalangle CBA$. Im Fall der Gleichheit $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA$ liegt die Höhe auf der Geraden $w$ und ebenso die Seitenhalbierende. Die Aussage ist dann wegen $H = M$ offensichtlich.

**Beweis der Aufgabe:**
Sei $W$ der Schnittpunkt von $w$ mit der Strecke $\overline{AB}$. Aufgrund des rechten Winkels $\sphericalangle ACB$ liegt $C$ auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$ (Umkehrung des Satz des Thales). Dieser Thaleskreis hat den Mittelpunkt $M$.



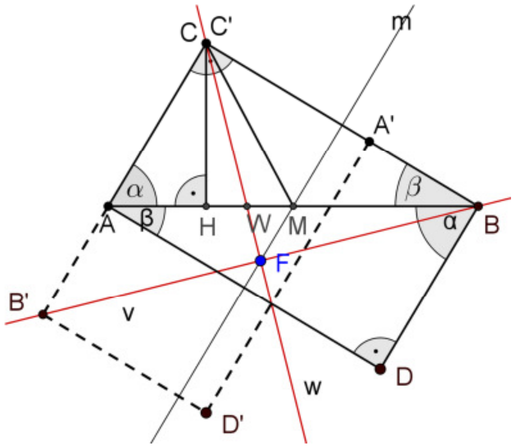

Da $\overline{MB}$, $\overline{MA}$ und $\overline{MC}$ Radien des Thaleskreises sind, sind diese Strecken gleich lang. Also ist das Dreieck $CMB$ gleichschenklig mit Basis $BC$. Die Basiswinkel $\sphericalangle MCB$ und $\sphericalangle CBM = \beta$ sind also gleich weit.
Da das Dreieck $ABC$ rechtwinklig ist, gilt nach dem Winkelsummensatz $\beta = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$.
Das Dreieck $AHC$ rechtwinklig ist, gilt nach dem Winkelsummensatz in den Dreiecken $AHC$ und $ACB$ gilt also $\sphericalangle ACH = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$.

Nach der Vorbemerkung gilt $\alpha > \beta$ und $\alpha + \beta = 90°$. Also ist $\beta < 45° = \sphericalangle ACW = \sphericalangle WCB$. Deswegen liegt $W$ auf $\overline{AB}$ zwischen $H$ und $M$ und es gilt

$$\sphericalangle HCW = \sphericalangle ACW - \sphericalangle ACH = 45° - \beta = \sphericalangle WCB - \sphericalangle MCB = \sphericalangle WCM$$

Das ist die Behauptung.

**2. Beweisvorschlag (über Abbildungen):**



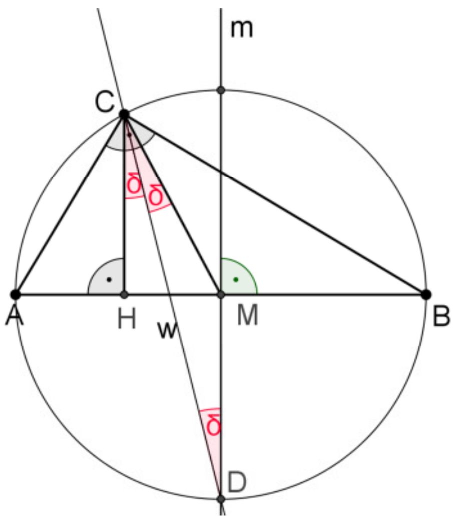

Man ergänzt das rechtwinklige Dreiecke $ABC$ wie in der Abbildung zu einem Rechteck $ADBC$, wobei $D$ aus $C$ durch Punktspiegelung an $M$ entsteht. Da $\alpha + \beta = 90°$ liegt tatsächlich ein Rechteck vor.

Das Viereck $ADBC$ wird an der Winkelhalbierenden $w$ gespiegelt, dadurch entsteht das Bildrechteck $A'C'B'D'$, wobei $C' = C$, da $C$ auf $w$ liegt. Sei andererseits $F$ der Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden $w$ und $v$ der rechten Winkel des Rechtecks bei $C$ bzw. $B$. Die Geraden $w$ und $v$ schneiden sich in $F$ im rechten Winkel, denn das Dreieck $CFB$ ist gleichschenklig mit Basiswinkel $45°$.

Somit ist $v$ die Orthogonale zu $w$ durch $B$ und $v$ verläuft also durch den Bildpunkt $B'$ von $B$ bei der Achsenspiegelung an $w$. Da außerdem $\overline{FB} = \overline{FC}$, wird $B$ bei einer Drehung um $F$ um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn auf $C$ abgebildet. Ebenso wird $C$ auf $B'$ abgebildet und damit muss $D$ bei dieser Drehung auf $A'$ und $A$ auf $D'$ abgebildet werden. Somit wird die Diagonale $\overline{AB}$ durch diese $90°$-Drehung auf $\overline{D'C}$ abgebildet, also sind $\overline{AB}$ und $\overline{D'C}$ orthogonal. Da auch $\overline{CH}$ senkrecht auf $\overline{AB}$ steht, liegt also $H$ auf $\overline{D'C}$.

Da die Diagonale $\overline{CD}$, auf der $M$ liegt, durch die Achsenspiegelung an $w$ auf die Diagonale $\overline{CD'}$, auf der $H$ liegt, abgebildet wird, sind die Winkel $\sphericalangle WCM$ und $\sphericalangle HCW$ gleich weit. Das war zu zeigen.

**3. Beweisvorschlag (mit Südpolsatz):**




Nach dem sogenannten Südpolsatz schneiden sich in einem beliebigen Dreieck die Mittelsenkrechte $m$ einer Seite und die Winkelhalbierende $w$ der gegenüberliegenden Ecke auf dem Umkreis. Der Schnittpunkt ist der „Südpol" $D$.

Da die Höhe $\overline{CH}$ und die Mittelsenkrechte $m$ beide senkrecht auf $\overline{AB}$ stehen, sind sie parallel. Die Wechselwinkel $\sphericalangle HCD$ und $\sphericalangle MDC$ haben daher die gleiche Weite $\delta$.

Nach der Umkehrung des Satz des Thales ist $M$ der Mittelpunkt des Umkreises, also sind die Radien $\overline{MC}$ und $\overline{MD}$ gleich lang. Somit ist das Dreieck $MCD$ gleichschenklig und die Basiswinkel $\sphericalangle DCM$ und $\sphericalangle MDC$ sind gleich weit. Da also $\delta = \sphericalangle HCD = \sphericalangle DCM$, halbiert $w$ den Winkel $\sphericalangle HCM$.

**Bemerkung:**

Dieser Beweis der Aufgabe beweist allgemeiner folgendes: Eine Innenwinkelhalbierende in einem Dreieck halbiert den Winkel, den der von dieser Ecke ausgehende Radius des Umkreises des Dreiecks mit der von dieser Ecke ausgehenden Höhe des Dreiecks einschließt.

## Aufgabe 3

*In jedes der elf freien Kästchen ist eine positive ganze Zahl einzutragen; dabei dürfen Zahlen auch mehrfach verwendet werden. Das Produkt der Zahlen in je vier aufeinanderfolgenden Kästchen muss jedoch stets den Wert 120 annehmen.*
*Bestimme alle Möglichkeiten für die Zahl im markierten Kästchen.*

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | | | 4 | | | | | | 3 | | |

### Lösung:

Die Zahl 5 und keine andere Zahl kann im markierten Kästchen stehen.

### 1. Beweisvorschlag (Periodizität):

Es muss gezeigt werden, dass (A) die Zahl $5$ im markierten Kästchen stehen kann und dass (B) keine andere Zahl dort stehen kann. Den Teil (A) zeigt man am einfachsten durch die Angabe einer Verteilung der Zahlen auf die Felder, die die Aufgabenstellung erfüllt:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 2 | 3 | 5 | 4 | 2 | 3 | 5 | 4 | 2 | 3 | 5 | 4 |

Dabei stehen in beliebigen vier aufeinanderfolgenden Kästchen offenbar immer die Zahlen 2, 3, 4 und 5 in irgendeiner Reihenfolge und das Produkt dieser Zahlen ist 120.

***Nun der Beweis von (B):***

Wenn in die Kästchen entsprechend der Regel in fünf nebeneinanderliegende Kästchen die Zahlen $a, b, c, d$ und $e$ eingetragen werden, dann gilt $a \cdot b \cdot c \cdot d = 120$ und auch $b \cdot c \cdot d \cdot e = 120$. Weil es sich um positive Zahlen handelt, darf man beide Gleichungen durch $b \cdot c \cdot d$ teilen und erhält

$$a = \frac{120}{b \cdot c \cdot d} = e$$

Eine Zahl muss sich also im Abstand von vier Feldern wiederholen. Ausgehend von der schon eingetragenen Zahl $2$ ergeben sich die in der folgenden Tabelle rot markierten Ergänzungen:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | | | 4 | 2 | | | | 2 | 3 | | |

Ausgegend von der eingetragenen Zahl 3 ergänzt man ebenso weitere Zahlen in Kästchen:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 3 | | 4 | 2 | 3 | x | | 2 | 3 | | |

Für die gesuchte Zahl $x$ ergibt sich dann aus $120 = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \ = \ 24 \cdot x$, dass $x = \frac{120}{24} = 5$ sein muss. Damit ist (B) bewiesen.

## 2. Beweisvorschlag (Fallunterscheidung):

Wir beginnen mit den vier folgenden aufeinander folgenden Zahlen $2, a, b, 4$:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | a | b | 4 | | | | | | 3 | | |

Ihr Produkt $2 \cdot a \cdot b \cdot 4$ muss nach Aufgabenstellung $120$ ergeben.
Das Produkt der beiden Zahlen $a$ und $b$ ergibt daher $a \cdot b = 120 : (2 \cdot 4) = 15$. Die einzigen vier Möglichkeiten, wie man $15$ als Produkt von zwei positiven ganzen Zahlen schreiben kann, sind $15 = 1 \cdot 15 = 15 \cdot 1 = 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$, es gibt also vier Fälle:

**Fall1:** $a = 1, b = 15$
Es liegt also folgende Verteilung vor:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 1 | 15 | 4 | c | | | | | 3 | | |

Man ergänzt nun ausgehend von den vier Zahlen $2,1,15,4$ eindeutig nach rechts weitere Zahlen, da das Produkt von vier aufeinander folgenden Zahlen $120$ ergeben muss. Die nächste Zahl $c$ ist $c = \frac{120}{1 \cdot 15 \cdot 4} = 2$. Dann folgt der Reihe nach $\frac{120}{15 \cdot 4 \cdot 2} = 1$, $\frac{120}{4 \cdot 2 \cdot 1} = 15$, $\frac{120}{2 \cdot 1 \cdot 15} = 4$, $\frac{120}{1 \cdot 15 \cdot 4} = 2$. Es entsteht also folgende Reihenfolge:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 1 | 15 | 4 | 2 | 1 | 15 | 4 | 2 | 3 | | |

Das Produkt der letzten vier eingetragenen Zahlen ist $15 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 360 \neq 120$. Das ist nach Aufgabenstellung nicht erlaubt, also ist dieser Fall nicht möglich.

**Fall 2:** $a = 15, b = 1$
Es liegt also folgende Verteilung vor:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 15 | 1 | 4 | c | | | | | 3 | | |

Wieder ergänzt man ausgehend von $2,15,1,4$ eindeutig nach rechts die Zahlen $c = \frac{120}{15 \cdot 1 \cdot 4} = 2$, $\frac{120}{1 \cdot 4 \cdot 2} = 15$, $\frac{120}{4 \cdot 2 \cdot 15} = 1$, $\frac{120}{2 \cdot 15 \cdot 1} = 4$, $\frac{120}{15 \cdot 1 \cdot 4} = 2$. Es entsteht also folgende Reihenfolge:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 15 | 1 | 4 | 2 | 15 | 1 | 4 | 2 | 3 | | |

Das Produkt der letzten vier eingetragenen Zahlen ist $1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24 \neq 120$. Das ist nach Aufgabenstellung nicht erlaubt, also ist dieser Fall nicht möglich.

**Fall 3:** $a = 3, b = 5$
Man geht also aus von der Verteilung:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 3 | 5 | 4 | | | | | | 3 | | |

Wieder ergänzt man ausgehend von $2,3,5,4$ nach rechts wie in den vorigen Fällen die Zahlen $2,3,5,4,2$. Man erhält

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 3 | 5 | 4 | 2 | 3 | 5 | 4 | 2 | 3 | | |

Diesmal passt auch die $3$, denn $5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 120$. In der Tat kann man jetzt auch noch die fehlenden Zahlen ergänzen.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **5** | **4** | **2** | **3** | **5** | **4** | **2** | **3** | **5** | **4** | **2** | **3** | **5** | **4** |

Durch Nachrechnen zeigt man, dass alle Produkte von vier benachbarten Zahlen $120$ ergeben. Es ergibt sich also eine Lösung der Aufgabe mit gesuchter Zahl $5$.

**Fall 4:** $a = 5, b = 3$
Es liegt also folgende Verteilung vor:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **2** | **5** | **3** | **4** | | | | | | **3** | | |

Wieder ergänzt man ausgehend von $2{,}5{,}3{,}4$ eindeutig nach rechts die Zahlen $2{,}5{,}3{,}4{,}2$
Es entsteht also folgende Reihenfolge:

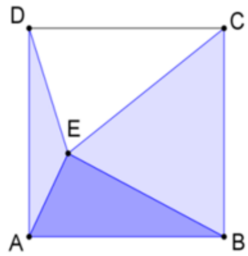
| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **2** | **5** | **3** | **4** | **2** | **5** | **3** | **4** | **2** | **3** | | |

Das Produkt der letzten vier eingetragenen Zahlen ist $3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 72 \neq 120$. Das ist nach Aufgabenstellung nicht erlaubt, also ist dieser Fall nicht möglich.

Es bleibt also nur Fall 3 mit der gesuchten Zahl $5$ übrig. Das war zu zeigen.

## Aufgabe 4

*Im Quadrat ABCD liegt ein Punkt E so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABE doppelt so groß ist wie der des Dreiecks DAE und halb so groß wie der des Dreiecks BCE.*
*Beweise: Das Dreieck ABE ist rechtwinklig.*



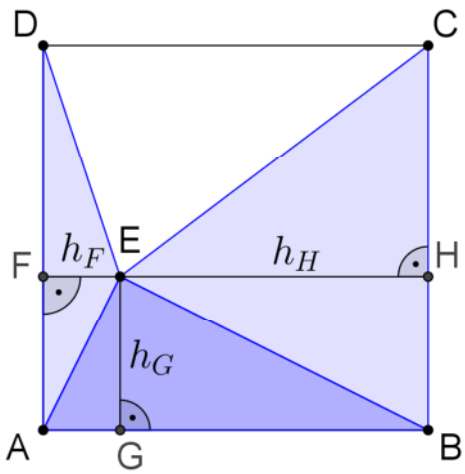

### 1. Beweisvorschlag (mit Umkehrung des Höhensatzes):

Seien weiter $h_F$, $h_G$ und $h_H$ die Höhen in den Dreiecken $DAE$, $ABE$ und $BCE$ (siehe Abbildung). Es sei $a$ die Seitenlänge des Quadrats. Dann haben die drei Dreiecke gleich lange Grundseiten der Länge $a$.
Nach Voraussetzung gilt für die Flächeninhalte der Dreiecke:

$$\mathcal{F}(ABE) = 2 \cdot \mathcal{F}(DAE) = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{F}(BCE)$$

oder

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_G = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_H.$$




Nach Division durch $\frac{1}{2}a \neq 0$ folgt $h_G = 2 \cdot h_F = \frac{1}{2} \cdot h_H$, also $h_F = \frac{1}{2}h_G$ und $h_H = 2h_G$.
Weil die Vierecke $AGEF$ und $GBHE$ Rechtecke sind, gilt $\overline{AG} = h_F$ und $\overline{GB} = h_H$. Die Strecken $\overline{AG}$ und $\overline{GB}$ sind die Höhenabschnitte zur Höhe $h_G$.

Nun gilt $\overline{AG} \cdot \overline{GB} = h_F \cdot h_H = \frac{1}{2}h_G \cdot 2h_G = h_G^2$. Nach der Umkehrung des Höhensatzes ist ein Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel bei $C$, wenn für die Höhenabschnitte $q$ und $p$ zur Höhe $h$ von $C$ die Gleichung $q \cdot p = h^2$ gilt.
Da diese Gleichung für das Dreieck $ABE$ mit der Höhe von $E$ erfüllt ist, ist das Dreieck $ABE$ rechtwinklig bei $E$. Das war zu zeigen.

### 2. Beweisvorschlag (mit Umkehrung des Satz des Pythagoras):

Mit den Bezeichnungen vom 1. Beweisvorschlag ergibt sich wie dort $\overline{AG} = \frac{1}{2} \cdot h_G$ und $\overline{GB} = 2 \cdot h_G$. Nach dem Satz des Pythagoras im Dreieck $AGE$ ergibt sich

$$\overline{AE}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GE}^2 = \left(\frac{1}{2}h_G\right)^2 + h_G^2 = \frac{1}{4}h_G^2 + h_G^2 = \frac{5}{4}h_G^2.$$

Ebenso ergibt sich im Dreieck $GBE$

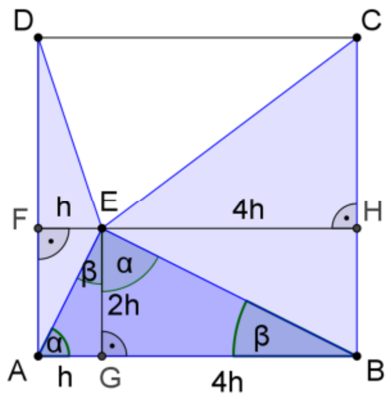
$$\overline{EB}^2 = \overline{GB}^2 + \overline{GE}^2 = (2h_G)^2 + h_G^2 = 4h_G^2 + h_G^2 = 5h_G^2.$$

Somit folgt $\overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 = \frac{5}{4}h_G^2 + 5h_G^2 = \frac{25}{4}h_G^2$. Andererseits gilt

$$\overline{AB}^2 = (\overline{AG} + \overline{GB})^2 = \left(\frac{1}{2}h_G + 2h_G\right)^2 = \left(\frac{5}{2}h_G\right)^2 = \frac{25}{4}h_G^2.$$

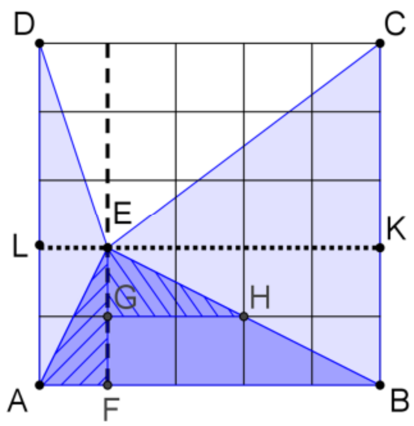
Nach der Umkehrung des Satz des Pythagoras ist ein Dreieck $ABC$, für das für seine Seitenlängen $a, b, c$ die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, rechtwinklig mit rechtem Winkel bei $C$.
Diese Beziehung gilt im Dreieck $ABE$, denn $\overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 = \frac{25}{4}h_G^2 = \overline{AB}^2$. Somit ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel bei $E$. Das war zu zeigen.

### *3. Beweisvorschlag (mit Ähnlichkeit):*




Sei $h$ die Höhe auf $\overline{AD}$ im Dreieck $DAE$. Wie im 1. Beweisvorschlag gilt dann $\overline{AG} = h$, $\overline{GB} = 4h$ und $\overline{GE} = 2h$. Die beiden Dreiecke $AGE$ und $EGB$ sind ähnlich, denn beide Dreiecke sind rechtwinklig, und entsprechende Katheten stehen im gleichen Verhältnis $\frac{\overline{GB}}{\overline{GE}} = \frac{4h}{2h} = 2$ bzw. $\frac{\overline{GE}}{\overline{AG}} = \frac{2h}{h} = 2$. Somit haben die beiden Dreiecke die gleichen Innenwinkel. Mit den Bezeichnungen $\sphericalangle BAE = \sphericalangle GAE = \alpha$ und $\sphericalangle EBA = \sphericalangle EBG = \beta$ folgt also $\sphericalangle AEG = \beta$. Da das Dreieck $AGE$ rechtwinklig ist, gilt $\beta = 90° - \alpha$.
Somit $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AEG + \sphericalangle GEB = \beta + \alpha = 90°$. Das war zu zeigen.

### *4. Beweisvorschlag (mit kongruenten Dreiecken):*




Das Quadrat wird durch Parallelen zu den Seiten in ein Gitter aus 25 kongruenten kleineren Quadraten zerlegt.
Da sich die Flächeninhalte der beiden Dreiecke $DAE$ und $BCE$ wie $1:4$ verhalten sollen und beide gleich lange Grundseiten $\overline{AD} = \overline{BC} = a$ haben, müssen sich die zugehörigen Höhen in den beiden Dreiecken, also die Abstände von $E$ zu den genannten Grundseiten ebenfalls wie $1:4$ verhalten.
Also liegt $E$ auf der gestrichelt hervorgehobenen Gitterlinie parallel zu $\overline{AD}$.
Da sich die Flächeninhalte der beiden Dreiecke $ABE$ und $DAE$ wie $2:1$ verhalten und beide gleich lange Grundseiten $\overline{AD} = \overline{AB} = a$ haben, müssen sich die zugehörigen Höhen ebenfalls wie $2:1$ verhalten. Das heißt $\overline{EF} = 2 \cdot \overline{LE}$. Daher muss $E$ auf der gepunkteten hervorgehobenen Gitterlinie parallel zu $\overline{AB}$ liegen.

Die Lage von $E$ als Gitterpunkt ist damit eindeutig bestimmt. Der Diagonalenschnittpunkt $H$ des Rechtecks mit den eingezeichneten Gitterpunkten $F$, $B$, $K$ und $E$ als Eckpunkten ist aus Symmetriegründen ebenfalls ein Gitterpunkt, so dass die beiden schraffiert eingezeichneten Dreiecke $AFE$ und $EGH$ offenbar kongruent und rechtwinklig sind. Daher ist

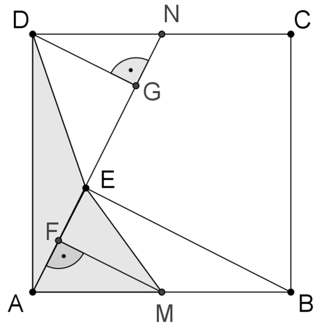
$$\sphericalangle AEB = \sphericalangle AEF + \sphericalangle GEH = \sphericalangle AEF + \sphericalangle FAE = 90°.$$

Das war zu zeigen.

**Variante:** Man könnte das Gitter in obigem Beweisvorschlag auch durch ein Koordinatensystem ersetzen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sind die Koordinaten der Punkte $A(0|0)$, $B(5|0)$, $C(5|5)$ und $D(0|5)$. Wie im obigen Beweis hat der Punkt $E$ die Koordinaten $E(1|2)$.
Dann hat die Gerade $AE$ die Steigung $m_{AE} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AF}} = 2$, die Gerade $EB$ die Steigung $m_{EB} = -\frac{\overline{EF}}{\overline{FB}} = -\frac{1}{2}$. Zwei Geraden sind genau dann orthogonal, wenn das Produkt ihrer Steigungen $-1$ ist. Das ist offensichtlich der Fall, also $\sphericalangle AEB = 90°$.

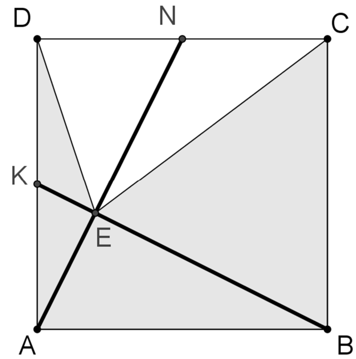
## *5. Beweisvorschlag (mit Drehung um 90°):*

***Hilfssatz:*** *Liegt in einem Quadrat $ABCD$ ein Punkt $E$ so, dass Dreieck $ABE$ doppelt so großen Flächeninhalt hat wie das Dreieck $DAE$, dann liegt $E$ auf der Verbindungsstrecke von $A$ mit dem Mittelpunkt der Strecke $CD$.*




**Beweis des Hilfssatzes:** Sei $M$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Dann hat das Dreieck $AME$ im Vergleich zum Dreieck $ABE$ eine halb so lange Grundseite, aber die gleiche Höhe durch den gemeinsamen Eckpunkt $E$. Der Flächeninhalt von Dreieck $AME$ ist demnach halb so groß wie der Flächeninhalt von Dreieck $ABE$ und damit genauso groß wie der Flächeninhalt von Dreieck $AED$.
Seien $F$ und $G$ die Lotfußpunkte von $M$ und $D$ auf die Gerade $AE$.
Die zugehörigen Lotstrecken sind Höhen in den flächengleichen Dreiecken $AME$ bzw. $AED$ auf der gemeinsamen Grundseite $\overline{AE}$. Diese Lotstrecken $\overline{MF}$ und $\overline{DG}$ sind also gleich lang. Weiter sei N der Schnittpunkt von $\overline{AE}$ mit $\overline{DC}$. Dann sind die beiden Dreiecke $AMF$ und $NDG$ kongruent, denn sie stimmen in den Seitenlängen $\overline{MF}$ und $\overline{DG}$, den rechten Winkeln und den Wechselwinkeln $\sphericalangle FMA$ und $\sphericalangle DNG$ an den Parallelen $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ überein. Insbesondere ist daher $\overline{DN} = \overline{AM}$, weswegen $N$ der Mittelpunkt der Quadratseite $\overline{CD}$ ist. Damit ist der Hilfssatz gezeigt.

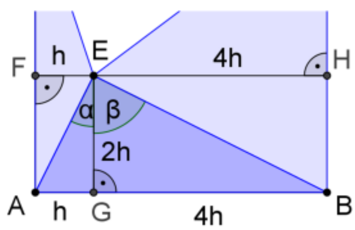
Nun zurück zum Beweis der Aufgabe.




Sei nun $N$ der Mittelpunkt von $\overline{CD}$ und $K$ der Mittelpunkt von $\overline{AD}$. Wegen des Hilfssatzes angewandt auf die beiden Dreiecke $DAE$ und $ABE$ liegt $E$ auf der Geraden $AN$. Wegen des Hilfssatzes angewandt auf die Dreiecke $ABE$ und $BCE$ liegt $E$ auf der Gerade $BK$. $E$ ist also der Schnittpunkt dieser beiden Geraden. Weil bei einer Drehung um den Quadratmittelpunkt um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn $A$ auf $B$ und $N$ auf $K$ abgebildet wird, wird bei dieser Drehung $\overline{AN}$ auf $\overline{BK}$ abgebildet.
Die beiden Geraden schließen also einen $90°$-Winkel ein. Das war zu beweisen.

## *6. Beweisvorschlag (mit Trigonometrie):*

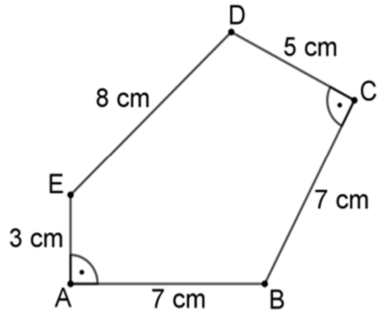
***Vorbemerkung:*** In einem rechtwinkligen Dreieck $ABC$ mit $\gamma = 90°$ und Katheten $a = 1cm$, $b = 2cm$ gilt $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ und $\tan(\beta) = \frac{b}{a} = 2$. Aus $\alpha + \beta = 90°$ folgt $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan(2) = 90°$ (Es ist auch die Bezeichnung „$tan^{-1}$“ statt „arctan“ in Gebrauch.)



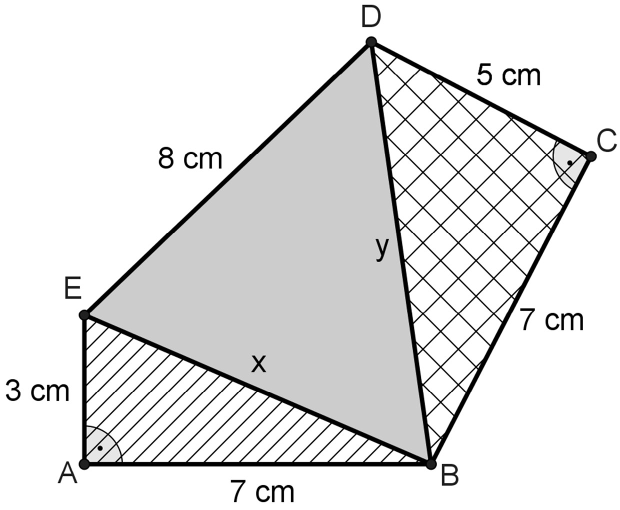

Nun zum Beweis: Im Dreieck $ABE$ ist $\tan(\sphericalangle AEG) = \frac{h}{2h} = \frac{1}{2}$, $\tan(\sphericalangle GEB) = \frac{4h}{2h} = 2$. Aus der Vorbemerkung folgt
$\sphericalangle AEG + \sphericalangle GEB = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan(2) = 90° = \sphericalangle AEB$.
Das war zu zeigen.

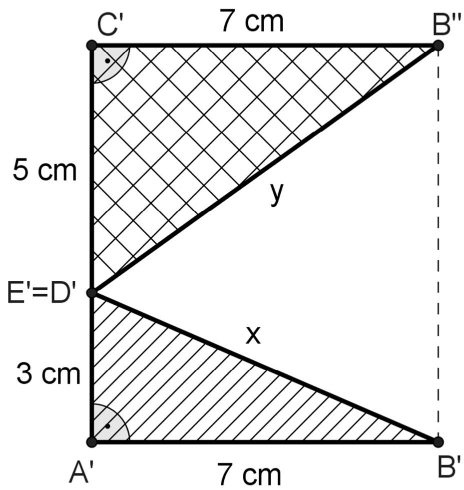
## Aufgabe 5

*Zeige, dass ein Fünfeck mit den in der Abbildung angegebenen Maßen durch zwei gerade Schnitte so in drei Teile zerlegt werden kann, dass sich die Teile lückenlos und überschneidungsfrei zu einem Rechteck zusammensetzen lassen.*




### *1. Beweisvorschlag (mit Kongruenzsatz SSS):*

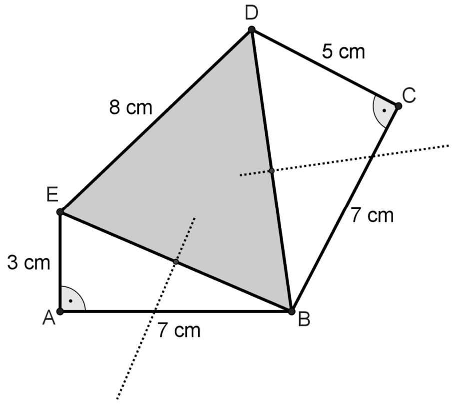


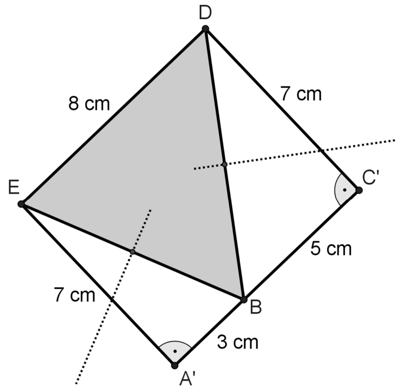




Zerschneidet man das Fünfeck durch zwei geraden Schnitte entlang der Strecken $\overline{EB}$ und $\overline{BD}$, so erhält man die drei Teildreiecke $ABE$, $BDE$ und $BCD$. Wir zeigen nun, dass man diese lückenlos und überschneidungsfrei zu einem Rechteck zusammensetzen kann.
Hierzu kann man zunächst die beiden Dreiecke $ABE$ und $BCD$ so verschieben und drehen, dass die zu diesen kongruenten Dreiecke $A'B'E'$ und $B''C'D'$ entstehen und so liegen, dass $E'$ mit $D'$ zusammenfällt und $A'$, $D'$ und $C'$ in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen. Dann ist insbesondere $\overline{A'C'} = \overline{A'D'} + \overline{D'C'} = 3cm + 5cm = 8cm$,
$\sphericalangle B'A'C' = \sphericalangle A'C'B'' = 90°$ und $\overline{A'B'} = \overline{C'B''} = 7cm$.

Die vier Punkte $A'$, $B'$, $B''$ und $C'$ sind daher die Ecken eines Rechtecks mit den Seitenlängen $8cm$ und $7cm$. Die noch nicht mit Teilen des Fünfecks bedeckte „Lücke“ ist das Dreieck $B'B''D'$. Dieses hat offensichtlich dieselben Seitenlängen wie das Dreieck $EBD$, nämlich $\overline{ED} = \overline{B'B''} = 8cm$, $\overline{EB} = \overline{E'B'} = x$ und $\overline{BD} = \overline{B''D'} = y$. Es ist also nach Kongruenzsatz SSS kongruent zu diesem (bei geändertem Drehsinn). Das Dreieckteil $EBD$ passt daher spiegelverkehrt, verschoben und gedreht genau in die „Lücke“. Damit ist alles gezeigt.

### 2. Beweisvorschlag (mit Spiegelung):




Zerschneidet man das Fünfeck durch zwei gerade Schnitte entlang der Strecken $\overline{EB}$ und $\overline{BD}$, so erhält man die drei Teildreiecke $ABE$, $BDE$ und $BCD$. Spiegelt man das Dreieck $ABE$ an der Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{BE}$, so erhält man das dazu kongruente Dreieck $A'BE$ und spiegelt man das Dreieck $BCD$ an der Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{BD}$, so erhält man das dazu kongruente Dreieck $BC'D$. Die drei Fünfeckteile lassen sich somit zu einer Figur mit fünf Ecken $A'$, $B$, $C'$, $D$ und $E$ zusammenlegen.

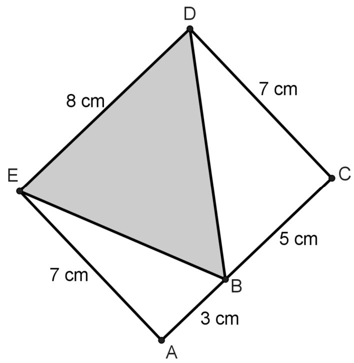
Wir zeigen nun, dass dabei $B$ auf der Strecke $\overline{A'C'}$ liegt. Dann hat die zusammengelegte Figur tatsächlich nur die vier Ecken $A'$, $C'$, $D$ und $E$. Sie hat zwei rechte Innenwinkel bei $A'$ und $C'$ und die gegenüberliegenden Seiten $\overline{A'E}$ und $\overline{C'D}$ sind gleich lang; die Figur ist daher ein Rechteck.

Die rechtwinkligen Dreiecke $A'BE$ und $BC'D$ kann man an ihren beiden Seiten der Länge $7cm$ zu einem Dreieck mit Seitenlängen $8cm$, $\overline{EB}$ und $\overline{BD}$ zusammenlegen. Das entstandene Dreieck hat also die gleichen Seitenlängen wie das Dreieck $EBD$, es ist nach Kongruenzsatz SSS kongruent zum Dreieck $EBD$. Somit $\sphericalangle DBE = \sphericalangle BDC' + \sphericalangle A'EB$.

Es ergibt sich
$\sphericalangle EBA' + \sphericalangle DBE + \sphericalangle C'BD = (\sphericalangle EBA' + \sphericalangle A'EB) + (\sphericalangle BDC' + \sphericalangle C'BD) = 90° + 90° = 180°$.
Somit liegt $B$ auf der Strecke $\overline{A'C'}$, was zu beweisen war.

### 3. Beweisvorschlag (mit Zerlegung eines Rechtecks):

Es genügt zu zeigen, dass man in umgekehrter Vorgehensweise ein spezielles Rechteck so in drei Teile zerschneiden kann, dass man diese überschneidungsfrei und lückenlos zum gegebenen Fünfeck zusammensetzen kann, wobei die Zerlegung des Fünfecks dann durch zwei gerade Schnitte erhalten werden muss.
Gegeben sei ein Rechteck $ACDE$ mit den Seitenlängen $8cm$ und $7cm$. Man wählt auf der Seite $\overline{AC}$ denjenigen Punkt $B$, für den $\overline{AB} = 3cm$ und $\overline{BC} = 5cm$. Schneidet man dieses Rechteck entlang der Strecken $\overline{EB}$ und $\overline{BD}$ in drei Teile, und spiegelt man die beiden Dreiecke $ABE$ und $BCD$ an den Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{EB}$ bzw. $\overline{DB}$, so ergibt sich die Situation wie im 2. Beweisvorschlag, nur in umgekehrter Richtung.

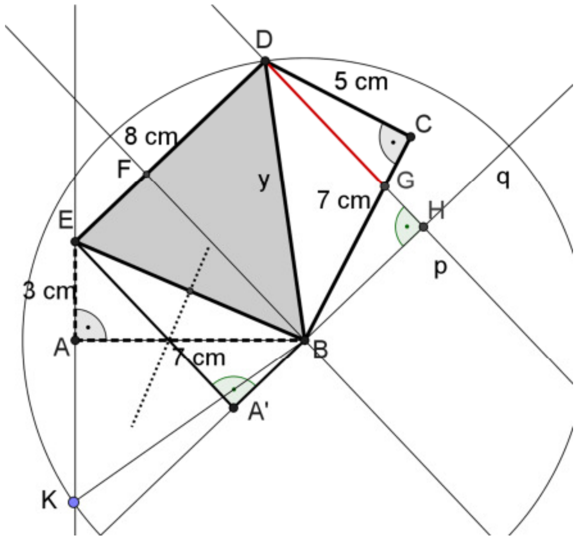


Es entsteht ein Fünfeck, das die in der Aufgabenstellung angegebenen Maße und die beiden rechten Innenwinkel besitzt. Es muss nur noch argumentiert werden, warum es sich dabei in jedem Fall um das Fünfeck aus der Aufgabenstellung handelt, dass es also nicht mehrere verschiedene Fünfecke mit den gegebenen Maßen gibt.

Mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Bezeichnungen sind die Streckenlängen von $\overline{EB}$ und $\overline{BD}$ mit dem Satz des Pythagoras eindeutig berechenbar und aufgrund des Kongruenzsatzes SSS gibt es höchstens ein Dreieck $EBD$, das die somit festgelegten drei Seitenlängen hat. Über dessen Seiten $\overline{EB}$ und $\overline{DB}$ kann man dann eindeutig die beiden rechtwinkligen Dreiecke ergänzen und erhält so das gegebene Fünfeck auf eindeutige Weise.
Damit ist die Behauptung gezeigt.

### *4. Beweisvorschlag (mit einem anderen Schnitt):*

Zunächst wird das Fünfeck $ABCDE$ entlang $\overline{BE}$ geschnitten, das abgeschnittene rechtwinklige Dreieck wird an der Mittelsenkrechten von $\overline{EB}$ gespiegelt, so dass das neue Fünfecke $A'BCDE$ mit rechten Winkeln bei $A$‘ und $C$ entsteht. Es ist also $\overline{A'E}$ senkrecht zu $\overline{A'B}$.




Nun wird das Fünfeck entlang der Parallelen $p$ zu $\overline{A'E}$ durch $D$ gestrichen (rote Strecke). Diese Parallele schneidet $\overline{BC}$ in $G$.

Sei $q$ die Verlängerung von $\overline{A'B}$. Da $\overline{A'B}$ senkrecht auf $\overline{A'E}$ steht, schneidet $q$ die Parallele $p$ senkrecht. Der Schnittpunkt heiße $H$.

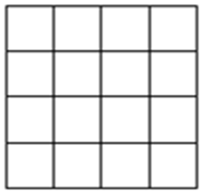
Wir zeigen, dass $\sphericalangle A'ED = 90°$ ist, also $\overline{ED}$ parallel zu $\overline{A'H}$ ist. Dazu wird das Dreieck $BCD$ um $B$ gedreht, dass $\overline{BC}$ auf $\overline{AB}$ fällt (beide Strecken haben die Seitenlänge $7cm$). Das Dreieck $BCD$ geht durch diese Drehung in $KBA$ über. Das Viereck $KBDE$ hat die Seitenlängen $8cm$, $8cm$, $y$, $y$, es ist also ein Drachenviereck. Die Diagonale $\overline{EB}$ ist Symmetrieachse des Drachens, durch Spiegelung an $\overline{EB}$ geht $A$ in den Punkt $F$ auf $\overline{DE}$ mit $\overline{EF} = 3cm$ über. Das Viereck $ABFE$ ist auch ein rechtwinkliger Drache mit den Seitenlängen 7cm,7cm,3cm,3cm. Somit $\sphericalangle FEB = \sphericalangle EBA = 90° - \sphericalangle BEF$. Also $\sphericalangle A'ED = \sphericalangle A'EB + \sphericalangle BEF = \sphericalangle EBA + \sphericalangle BEF = 90°$.

Da $\overline{ED}$ parallel zu $\overline{A'H}$ ist, ist $A'HDE$ ein Rechteck mit Seitenlängen $8cm$ und $7cm$. Da $\overline{A'H} = \overline{ED} = 8cm$ ist $\overline{BH} = 5cm$.

Die beiden Dreiecke $GCD$ und $BHG$ haben gleiche Innenwinkel ($\sphericalangle DCG = \sphericalangle GHB = 90°$, $\sphericalangle CGD = \sphericalangle BGH$, da es Scheitelwinkel sind) und eine gleich lange Seitenlänge ($\overline{BH} = \overline{CD} = 5cm$). Somit sind die beiden Dreiecke kongruent und man kann $GCD$ auf $GBH$ legen, so dass das Rechteck $A'HDE$ mit den Seitenlängen $8cm$ und $7cm$ entsteht.

## *Aufgabe 6*

*Nicola möchte in jedes Feld des nebenstehenden Gitters eine positive ganze Zahl eintragen. Von diesen Zahlen sollen keine zwei gleich sein.*
*Außerdem sollen je zwei der Zahlen, die in Feldern mit einer gemeinsamen Kante stehen, einen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben.*



*Bestimme den kleinstmöglichen Summenwert dieser 16 Zahlen.*

## *Lösung:*

Der kleinstmögliche Summenwert dieser $16$ Zahlen ist $170$.

## *Beweisvorschlag:*

Dass der Summenwert $170$ möglich ist, zeigt das folgende Beispiel mit der Summe
$2+3+4+5+6+7+8+9+10+12+14+15+16+18+20+21=170$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 14 | 16 | 8 |
| 21 | 18 | 2 | 4 |
| 3 | 12 | 20 | 10 |
| 9 | 6 | 15 | 5 |

Nun muss noch bewiesen werden, dass es keine erlaubte Zahlenbelegung gibt, bei der die Summe kleiner als $170$ ist.

Zunächst kann man feststellen:

- Jedes Feld hat mindestens zwei Nachbarfelder.
- Da die Zahl $1$ mit allen Zahlen nur den gemeinsamen Teiler $1$ hat, kann sie nicht zu den $16$ Zahlen gehören.
- Gehört eine Primzahl zu den $16$ Zahlen, so müssen auch mindestens zwei verschiedene Vielfache dieser Primzahl dazu gehören. Im kleinsten Fall ihr Zwei- und ihre Dreifaches. Nur die Vielfachen einer Primzahl haben einen gemeinsamen Teiler größer 1 mit der Primzahl.

Würde eine Primzahl $p \geq 11$ zu den $16$ Zahlen gehören, so ist ihre Summe $S$ mindestens
$p+2p+3p+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14=6p+104 \geq 170$.
Der Wert 170 wäre nur für $p=11$ möglich. Wenn aber $p=11$, so ist die Summe mindestens

$$11+22+33+2+3+4+5+6+7+8+9+10+12+13+14+15=174 \geq 170$$

In jedem Fall wäre die Summe größer als 170, wenn eine Primzahl $p \geq 11$ zu den 16 Zahlen gehören würde.

Somit können $11,13,17$ und $19$ nicht zu den $16$ Zahlen gehören. Die $16$ kleinsten Zahlen unter Weglassen von diesen vier Primzahlen und $1$ sind
$2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21$. Da es die kleinstmöglichen Zahlen sind, haben sie auch den kleinstmöglichen Summenwert. Dieser Summenwert ist $170$.