

Aufgabe 1

Alina, Bilge und Celia sitzen an einem Tisch, auf dem ein gewöhnlicher Spielwürfel liegt. Jede kann drei Würfelflächen sehen. Alina sieht auf den Würfelflächen insgesamt 9, Bilge 14 und Celia 15 Augen.

Lässt sich mit diesen Angaben die Augenzahl auf der Unterseite des Würfels eindeutig bestimmen?

Lösung:

Ja, die Augenzahl auf der Unterseite des Würfels lässt sich eindeutig bestimmen: Sie ist gleich 2.

1. Beweisvorschlag (Summen aus Augenzahlen kombinieren):

(1) Celia sieht drei Seitenflächen mit Augensumme 15. Die einzige Möglichkeit 15 als Summe von drei verschiedenen Zahlen der Zahlen 1,2,3,4,5,6 darzustellen ist $15 = 4 + 5 + 6$. Jede andere Summe aus drei verschiedenen Zahlen ist kleiner als 15. Celia sieht also 4, 5 und 6 Augen.

(2) Bilge sieht drei Seitenflächen mit Augensumme 14. Die einzige Möglichkeit 14 als Summe von drei verschiedenen Zahlen der Zahlen 1,2,3,4,5,6 darzustellen ist $14 = 3 + 5 + 6$. Wenn nämlich 6 nicht vorkommt, so ist die Summe höchstens $5 + 4 + 3 = 12$, wenn 5 nicht vorkommt, so ist die Summe höchstens $6 + 4 + 3 = 13$. Bilge sieht also 3, 5 und 6 Augen.

(3) Alina sieht drei Seitenflächen mit Augensumme 9. Die einzigen Möglichkeiten 9 als Summe von drei verschiedenen Zahlen der Zahlen 1,2,3,4,5,6 zu kombinieren sind $9 = 1 + 2 + 6$, $9 = 1 + 3 + 5$, $9 = 2 + 3 + 4$. Zwei der drei Zahlen müssen nämlich kleiner als 4 sein, da sonst die Summe $1 + 4 + 5 = 10$ zu groß ist. Somit bleiben nur diese drei Möglichkeiten.

Die Kombination $9 = 1 + 2 + 6$ ist unmöglich, da 1 und 6 gegenüber liegen und daher nicht gleichzeitig gesehen werden können.

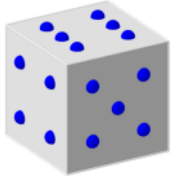

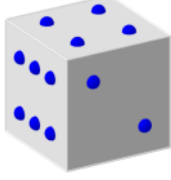
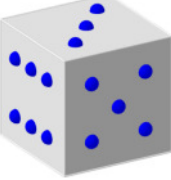
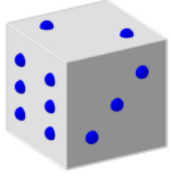
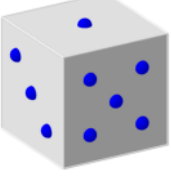
Die Kombination $9 = 2 + 3 + 4$ ist unmöglich, da 3 und 4 gegenüber liegen und daher nicht gleichzeitig gesehen werden können.

Alina sieht also 1, 3 und 5 Augen.

Nach (1), (2) und (3) ist 2 die einzige Augenzahl, die kein Mädchen sieht. Sie muss unten liegen.

2. Beweisvorschlag (Untersuchung aller möglichen Würfellagen):

Für jede mögliche Augenzahl auf der Unterseite eines gewöhnlichen Spielwürfels werden die vier möglichen Augensummen der Augenzahl der Oberseite und je zweier benachbarter Seitenflächen berechnet.

Augenzahl unten	Würfelansicht	mögliche Augensummen dreier Würfelflächen
1		$4 + 5 + 6 = 15$, $5 + 3 + 6 = 14$, $3 + 2 + 6 = 11$, $2 + 4 + 6 = 12$. Alinas Augenzahl ist falsch
2		$6 + 4 + 5 = 15$, $4 + 1 + 5 = 10$, $1 + 3 + 5 = 9$, $3 + 6 + 5 = 14$. Alle Angaben passen.
3		$6 + 2 + 4 = 12$, $2 + 1 + 4 = 7$, $1 + 5 + 4 = 10$, $5 + 6 + 4 = 15$. Alinas und Bilges Augenzahlen sind falsch
4		$6 + 5 + 3 = 14$, $5 + 1 + 3 = 9$, $1 + 2 + 3 = 6$, $2 + 6 + 3 = 11$. Celias Augenzahl ist falsch
5		$6 + 3 + 2 = 11$, $3 + 1 + 2 = 6$, $1 + 4 + 2 = 7$, $4 + 6 + 2 = 12$. Alle Augenzahlen sind falsch
6		$3 + 5 + 1 = 9$, $5 + 4 + 1 = 10$, $4 + 2 + 1 = 7$, $2 + 3 + 1 = 6$. Celias und Bilges Augenzahlen sind falsch

Nur im Fall, dass die Augenzahl 2 unten liegt, können die drei Mädchen die Augensummen 9, 14 und 15 sehen. Somit muss 2 unten liegen.

Bemerkung zu diesem Beweisvorschlag:

Man erkennt, dass nie eine untere Augenzahl alleine wegen Bilges Augensumme 14 ausgeschlossen wird. Die Angabe der Augensumme 14 von Bilge ist also für die Lösung der Aufgabe nicht notwendig. Man hätte die untere Augenzahl auch ohne diese Angabe eindeutig bestimmen können.

3. Beweisvorschlag (Über Ausschluss aller anderen Möglichkeiten):

Weil auf zwei Seitenflächen insgesamt höchstens $6 + 5 = 11$ Augen zu sehen sein können, muss Celia auf der Oberseite mindestens $15 - 11 = 4$ Augen sehen.

Fall 1: Auf der Oberseite sind genau 4 Augen.

Dann sieht Bilge auf ihren zwei Seitenflächen insgesamt $14 - 4 = 10$ Augen. Die einzige Möglichkeit, 10 Augen auf zwei Seitenflächen zu verteilen ist $6 + 4$ Augen. Weil die 4 Augen aber schon auf der Oberseite zu sehen sind, kann dieser Fall nicht eintreten.

Fall 2: Auf der Oberseite sind genau 6 Augen.

Dann sieht Alina auf ihren zwei Seitenflächen insgesamt $9 - 6 = 3$ Augen. Die einzige Möglichkeit, 3 Augen auf zwei verschiedene Seitenflächen zu verteilen ist $2 + 1$ Augen. Weil die Seite mit 1 Auge aber bei einem Spielwürfel der Seite mit 6 Augen gegenüberliegt, also auf die Unterseite ist, kann dieser Fall nicht eintreten.

Daher bleibt nur die Möglichkeit, dass die Augenzahl auf der Oberseite gleich 5 und deswegen die Augenzahl auf der Unterseite gleich 2 ist. Dann sieht Celia außer der 5 die benachbarten Augenzahlen 6 und 4, Bilge sieht 6 und 3, Alina sieht 3 und 1.

4. Beweisvorschlag (Mit „Paardifferenzen“):

Der Würfel hat 3 gegenüberliegende Augenpaare: (6; 1) mit Paardifferenz 5, (5; 2) mit Paardifferenz 3 und (4; 3) mit Paardifferenz 1.

Umgekehrt gehört zu jeder der möglichen Paardifferenzen 1, 3 und 5 eindeutig das zugehörige Paar von gegenüberliegenden Augenzahlen.

Die Augensumme von zwei Personen, die zwei gleiche Würfelflächen sehen, kann sich daher nur um eine der Paardifferenzen 1, 3 oder 5 unterscheiden.

Für Personen, die nur die obere Würfelfläche gleich sehen, aber zwei Seitenflächen anders, muss der Unterschied der Augensummen eine Summe oder Differenz von zwei verschiedenen Paardifferenzen sein.

Celia sieht 6 Augen mehr als Alina. Das ist nur auf eine Weise als Summe oder Differenz von zwei verschiedenen Paardifferenzen darstellbar, nämlich als $5 + 1$.

Alina sieht daher seitlich die Augenzahl 1 vom Paar (6,1) und die Augenzahl 3 vom Paar (4,3) und wegen der Summe 9 noch oben 5. Somit ist unten 2.

Bemerkung:

Auch in diesem Beweisvorschlag wird die Information von Bilge nicht benötigt.

5. Beweisvorschlag (Durch Bezeichnen der Augenzahlen mit Variablen):

Wir bezeichnen die Augenzahlen auf den von den Mädchen sichtbaren Seitenflächen des Würfels an einer beliebigen Seite beginnend der Reihe nach mit a, b, c und d . Es gibt vier Paare benachbarter Seitenflächen. Auf diesen Paaren stehen die Augenzahlen a und b oder b und c oder c und d oder d und a .

Von diesen vier Paaren benachbarter Seitenflächen wird genau eines von keinem Mädchen gesehen. Wir können die Augenzahlen auf den Seitenflächen so bezeichnen, dass dies das Paar ist, auf dem die Augenzahlen d und a stehen.

Es gibt also ein Mädchen, das die beiden Seitenflächen mit den Augenzahlen a und b sieht und ein anderes Mädchen, das die beiden Seitenflächen mit den Augenzahlen c und d sieht. Bezeichnet man die Augenzahl auf der Oberseite mit o , so sehen diese beiden Mädchen zusammen $(a + b + o) + (c + d + o) = (a + c) + (b + d) + 2 \cdot o$ Augen.

Weil sich gegenüberliegende Augenzahlen eines Spielwürfels zu 7 ergänzen, ist diese Summe gleich $7 + 7 + 2 \cdot o = 14 + 2 \cdot o$. Dies ist in jedem Fall eine gerade Zahl.

Aus den drei Augenzahlensummen 9, 14, 15, die Alina, Bilge und Celina sehen, kann man nun drei Summen von zwei Zahlen bilden:

1.) $9 + 14 = 23$ – ungerade

2.) $9 + 15 = 24$ – gerade

3.) $14 + 15 = 29$ – ungerade

Somit ist $9 + 15$ die einzige Summe, die einen geraden Wert hat.

Demnach muss $14 + 2 \cdot o = 9 + 15 = 24$ sein.

Umformen nach o ergibt $2 \cdot o = 24 - 14 = 10$ bzw. $o = 5$.

Daher ist die Augenzahl auf der Unterseite $7 - o = 7 - 5 = 2$.

Aufgabe 2

Um ein Rechteck mit der Länge 20 cm und der Breite 16 cm sind vier gefärbte Rechtecke gelegt, wie in der Figur skizziert. Diese gefärbten Rechtecke haben alle den gleichen Flächeninhalt. Ihre Längen und Breiten haben in der Einheit cm ganzzahlige Maßzahlen. Die Gesamtfigur ist punktsymmetrisch.



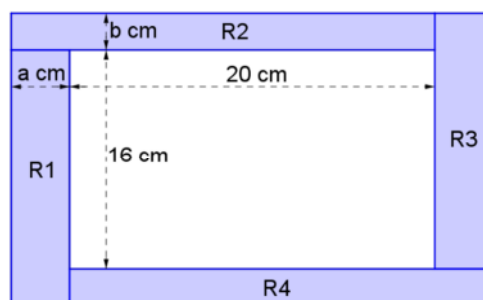
Bestimme den kleinstmöglichen Flächeninhalt eines gefärbten Rechtecks.

Lösung:

Der kleinstmögliche Flächeninhalt eines gefärbten Rechtecks ist 100 cm^2 .

1. Beweisvorschlag (Durch systematisches Probieren):

Die vier gefärbten Rechtecke werden wie in nebenstehendem Bild mit R1 bis R4 bezeichnet. Aufgrund der Punktsymmetrie der Figur haben die Rechtecke R1 und R3 beide die Breite $a \text{ cm}$ und die Länge $(16 + b) \text{ cm}$. Die beiden Rechtecke R2 und R4 haben beide die Breite $b \text{ cm}$ und die Länge $(20 + a) \text{ cm}$. Dabei sind a und b positive ganze Zahlen.



Entsprechend der Aufgabenstellung, müssen R1, R2, R3 und R4 alle denselben Flächeninhalt haben. Es muss also gelten:

$$(16 + b) \cdot a = (20 + a) \cdot b \quad (1)$$

Die Werte $1 \leq a \leq 6$ bzw. $1 \leq b \leq 5$ werden in die beiden Terme der beiden Seiten der Gleichung (1) eingesetzt und die sich ergebenden Werte werden berechnet. In den folgenden beiden Tabellen sind die Ergebnisse zusammengefasst.

Linke Seite von Gleichung (1): Term $(16 + b) \cdot a$

$a \setminus b$	1	2	3	4	5
1	17	18	19	20	21
2	34	36	38	40	42
3	51	54	57	60	63
4	68	72	76	80	84
5	85	90	95	100	105
6	102	108	114	120	126

Rechte Seite von Gleichung (1): $(20 + a) \cdot b$

$a \setminus b$	1	2	3	4	5
1	21	42	63	84	105
2	22	44	66	88	110
3	23	46	69	92	115
4	24	48	72	96	120
5	25	50	75	100	125
6	26	52	78	104	130

Im betrachteten Bereich gibt es nur ein Wertepaar für a und b , bei dem die Gleichung (1) erfüllt ist, nämlich $a = 5$ und $b = 4$. Der zugehörige Flächeninhalt der Rechtecke ist 100 cm^2 .

Weil die Termwerte von $(16 + b) \cdot a$ für wachsende a und b offenbar größer werden, kann es aufgrund der ersten Tabelle für $a > 6$ keine weiteren Wertepaare geben, bei denen das Ergebnis kleiner als 100 ist.

Weil auch die Termwerte von $(20 + a) \cdot b$ für wachsende a und b immer größer werden, kann es aufgrund der zweiten Tabelle für $b > 5$ keine weiteren Wertepaare geben, bei denen der Termwert kleiner als 100 ist.

Der minimale Flächeninhalt wird also in dem in den Tabellen untersuchten Bereich $a \leq 6$ und $b \leq 5$ angenommen.

Damit ist der kleinstmögliche Flächeninhalt der gefärbten Rechtecke gleich 100 cm^2 .

2. Beweisvorschlag (Mit Teilbarkeit):

Wie im ersten Beweisvorschlag ergibt sich Gleichung (1)

$$(16 + b) \cdot a = (20 + a) \cdot b .$$

Formt man Gleichung (1) um, so ergibt sich:

$$16 \cdot a + b \cdot a = 20 \cdot b + a \cdot b$$

$$16 \cdot a = 20 \cdot b$$

$$4 \cdot a = 5 \cdot b$$

$$a = \frac{5}{4} \cdot b$$

Weil a eine natürliche Zahl sein muss, muss b durch 4 teilbar sein, da sich sonst die 4 auf der rechten Seite nicht kürzen lässt. Es ist also $b = 4 \cdot n$ für eine positive natürliche Zahl n . Somit folgt $a = \frac{5}{4} \cdot b = \frac{5}{4} \cdot 4 \cdot n = 5 \cdot n$.

Setzt man nun $a = 5 \cdot n$ und $b = 4 \cdot n$ in den Term $A = (16 + b) \cdot a$ für den Flächeninhalt eines gefärbten Rechtecks ein, so ergibt sich $A = (16 + 4n) \cdot 5n = 80n + 20n^2$. Mit wachsendem n wird sowohl $80n$ als auch $20n^2$ immer größer und damit auch $A = 80n + 20n^2$. Somit erhält man den kleinstmöglichen Flächeninhalt für den kleinsten möglichen Wert von n , also für $n = 1$.

Für $n = 1$ ergibt sich $A = 80n + 20n^2 = 100$. Der kleinstmögliche Flächeninhalt eines gefärbten Rechtecks ist also 100 cm^2 .

3. Beweisvorschlag (Mit Parkettierung):

Wie in der Abbildung entstehen in den Ecken vier Rechtecke mit Länge a und Breite b . Eie im vorigen Beweisvorschlag ergibt sich $16 \cdot a = 20 \cdot b$ bzw.

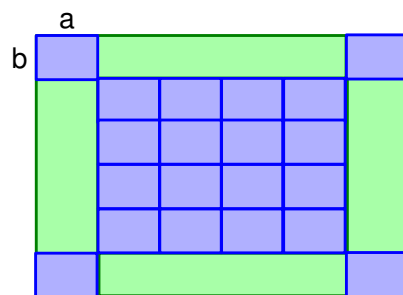
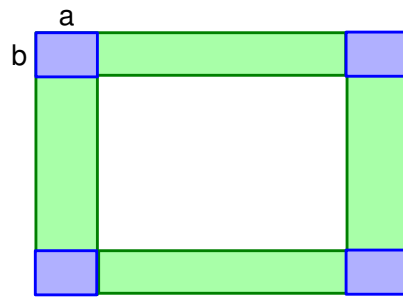
$$a:b = 20:16.$$

Die Eckrechtecke sind also alle ähnlich zum ursprünglichen Rechteck.

Als Maße für die Länge und Breite der Eckrechtecke erhält man also (in cm): (5; 4), (10; 8), (15; 12), ..., da in cm nur ganzzahlige Werte erlaubt sind. Da 5 und 4 keinen gemeinsamen Teiler haben, ist (5; 4) die kleinste Möglichkeit, die bei einem Eckrechteck als Länge bzw. Breite vorkommen kann.

Aus $A = (16 + b) \cdot a$ folgt, dass die kleinsten Werte von a und b auch zum kleinsten Flächeninhalt der markierten Rechtecke führen.

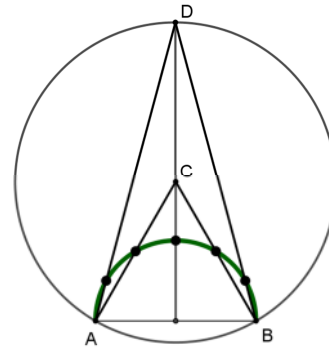
Mit den Eckrechtecken kann man das gesamte Rechteck überdecken. Für die markierten Rechtecke benötigt man 5 Eckrechtecke, d.h. ihr Flächeninhalt ist $5 \cdot (5 \cdot 4) \text{ cm}^2 = 100 \text{ cm}^2$.



Aufgabe 3

In der Figur ist das Dreieck ABC gleichseitig, der Punkt D ist Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecke \overline{AB} mit dem Kreis um C durch A .

Zeige: Der Halbkreis über \overline{AB} wird von den Strecken in der Figur in sechs gleich lange Teilbögen unterteilt.



Beweisvorschlag:

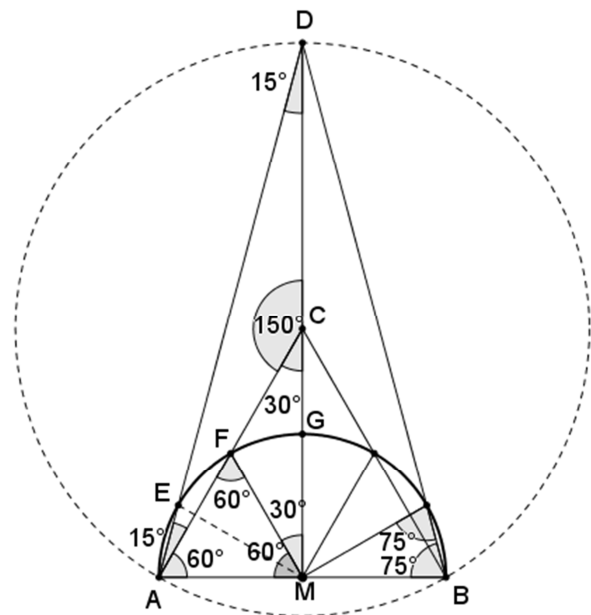
Sei M der Mittelpunkt der Strecke AB . Die Bezeichnungen der Punkte E , F und G auf dem Halbkreis erkennt man in der Zeichnung.

Es ist zu zeigen, dass

(1) $\sphericalangle GMF = 30^\circ$ und

(2) $\sphericalangle EMA = 30^\circ$ ist.

Dann ist nämlich wegen $\sphericalangle GMA = 90^\circ$ auch $\sphericalangle FME = 30^\circ$ und wegen der Achsensymmetrie der Figur sind auch die drei übrigen Mittelpunktswinkel des Halbkreises gleich 30° . Es ergeben sich sechs gleich große Mittelpunktswinkel mit je 30° , zu denen dann auch sechs gleich große Halbkreisbögen gehören. Das ist die Behauptung.



Da das Dreieck ABC nach Aufgabenstellung gleichseitig ist, ist $\sphericalangle MAF = \sphericalangle BAC = 60^\circ$, $\sphericalangle ACM = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle ACB = 30^\circ$ und $\sphericalangle DCA = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Da die Strecken MA und MF Radien des Halbkreises sind, ist das Dreieck AMF gleichschenkelig und $\sphericalangle AFM = \sphericalangle MAF = 60^\circ$. Folglich ist auch $\sphericalangle FMA = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$ und $\sphericalangle GMF = \sphericalangle CMF = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Das ist Gleichung (1).

Da A und D auf dem Kreis um C liegen, ist das Dreieck ACD gleichschenkelig und für den Basiswinkel $\sphericalangle CAD$ gilt: $\sphericalangle CAD = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \sphericalangle DCA) = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$. Also ist $\sphericalangle MAE = \sphericalangle MAF + \sphericalangle FAD = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$.

Da A und E auf dem Halbkreis um M liegen, ist das Dreieck AME gleichschenkelig mit den gleich großen Basiswinkeln $\sphericalangle AEM = \sphericalangle MAE = 75^\circ$, so dass sich für den Winkel an seiner Spitze $\sphericalangle EMA = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$ ergibt. Das ist Gleichung (2).

Aus (1) und (2) ergibt sich wie oben beschrieben die Behauptung.

Aufgabe 4

Marius möchte in jedes der fünf Kästchen eine positive ganze Zahl eintragen. Die Zahlen sollen paarweise verschieden und jede Zahl (außer der Zahl ganz links) soll ein ganzzahliges Vielfaches der links davon stehenden Zahl sein. Die Summe aller Zahlen soll den Wert 78 haben.

$$\square + \square + \square + \square + \square = 78$$

Welche Zahlen kann Marius in die Kästchen schreiben?

Lösung:

Marius kann genau die Zahlen 2,4,8,16 und 48 in dieser Reihenfolge in die Kästchen schreiben und keine anderen.

1. Beweisvorschlag (Ohne Fallunterscheidung):

Die fünf Zahlen werden von links nach rechts mit $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ bezeichnet. Zunächst werden die für a_3 , a_2 und a_1 in Frage kommenden Zahlenwerte eingegrenzt:

Behauptung 1: Die Zahl a_3 muss kleiner als 11 sein.

Beweis: Angenommen, a_3 wäre größer oder gleich 11. Da alle Zahlen paarweise verschieden und jede Zahl ein ganzzahliges Vielfaches der links davon stehenden Zahl sein soll, folgen daraus $a_4 \geq 2 \cdot 11 = 22$ und $a_5 \geq 2 \cdot 22 = 44$. Für die Summe aller fünf Zahlen gilt dann:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > 1 + 2 + 11 + 22 + 44 = 80 > 78.$$

Dies steht im Widerspruch zu dem geforderten Summenwert 78. Die Annahme $a_3 \geq 11$ trifft nicht zu. Somit kommen für a_3 nur die natürlichen Zahlen kleiner als 11 in Betracht.

Behauptung 2: Die Zahl a_2 muss kleiner oder gleich 5 sein, die Zahl a_1 muss kleiner oder gleich 2 sein.

Beweis: Weil a_3 ein echtes Vielfaches von a_2 ist, ist $a_2 \leq \frac{a_3}{2} \leq \frac{11}{2} = 5,5$. Daher ist $a_2 \leq 5$.

Genauso folgt: $a_1 \leq \frac{a_2}{2} \leq \frac{5}{2} = 2,5$, also $a_1 \leq 2$.

Behauptung 3: Die Zahl a_1 kann nicht gleich 1 sein.

Beweis: Angenommen, $a_1 = 1$. Dann ist die Summe der übrigen Zahlen $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 78 - 1 = 77$. Andererseits ist a_3 Vielfaches von a_2 , a_4 Vielfaches von a_3 und damit auch von a_2 und schließlich a_5 als Vielfaches von a_4 auch ein Vielfaches von a_2 . Da a_2 , a_3 , a_4 und a_5 durch a_2 teilbar sind, ist auch ihre Summe $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 77$ durch a_2 teilbar.

Da 77 nur die Teiler 1,7,11,77 hat und a_2 nach Behauptung 2 nur die Werte 1,2,3,4 oder 5 annehmen kann, bleibt nur $a_2 = 1$. Das kann aber wegen $a_2 > a_1$ nicht sein. Daher kann $a_1 = 1$ nicht gelten.

Wegen Behauptung 2 und 3 bleibt nur die Möglichkeit $a_1 = 2$.

Wegen Behauptung 2 und da a_2 ein echtes Vielfaches von $a_1 = 2$ ist, muss $a_2 = 4$ sein.

Wegen Behauptung 1 und da a_3 ein echtes Vielfaches von $a_2 = 4$ ist, muss $a_3 = 8$ sein.

Hieraus folgt für die übrigen beiden Zahlen a_4 und a_5 , dass

$a_4 + a_5 = 78 - 2 - 4 - 8 = 64$ ist. Weil a_5 hierbei Vielfaches von a_4 ist, muss

$a_4 + a_5 = 64$ Vielfaches von a_4 sein.

Die 64 hat aber nur die Teiler 1,2,4,8,16,32,64. Da $a_4 > a_3 = 8$ kommen für a_4 nur noch die Werte 16,32 oder 64 in Frage. Andererseits muss $a_5 < 64$ sein, da $a_4 + a_5 = 64$.

Daher $a_4 \leq \frac{a_5}{2} < \frac{64}{2} = 32$. Es bleibt nur $a_4 = 16$.

Damit ergibt sich schließlich $a_5 = 64 - 16 = 48$.

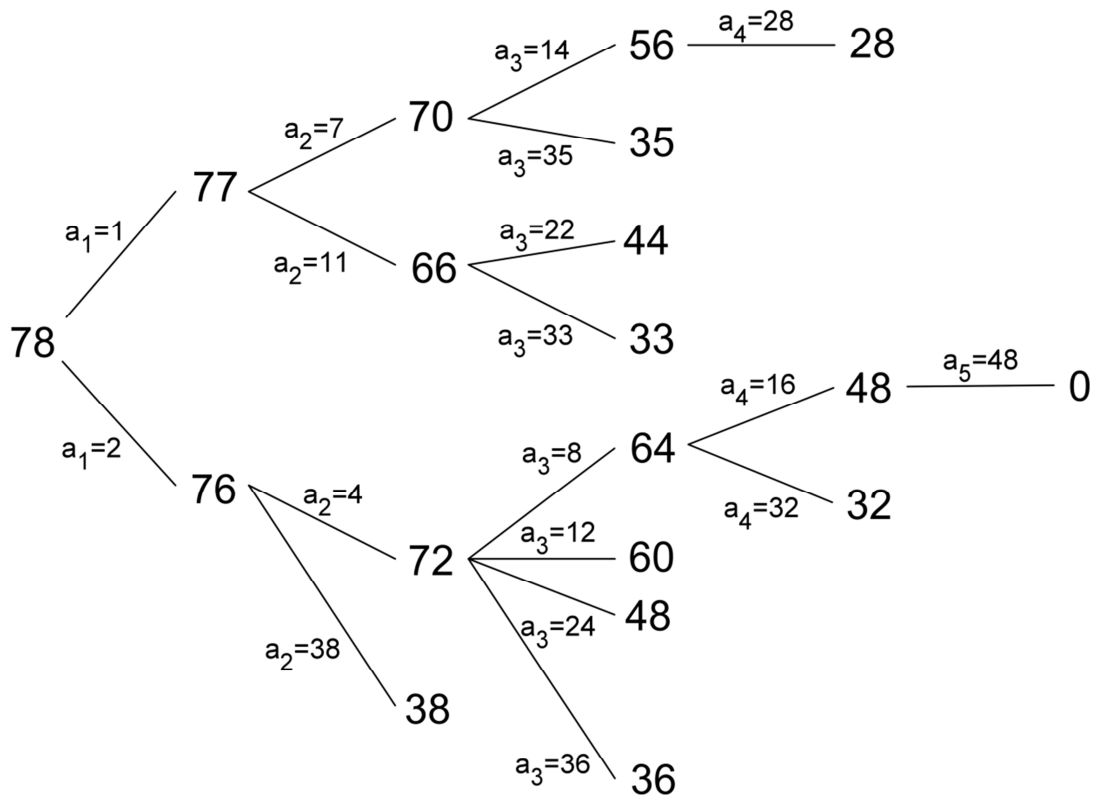
Es gibt nur eine einzige Möglichkeit für die fünf Zahlen.

Umgekehrt ist in der Summe $2 + 4 + 8 + 16 + 48$ jeder Summand ab dem zweiten ein echtes Vielfaches des vorhergehenden und die Summe hat den Wert 78. Daher kann Florian nur genau diese Zahlen in die Kästchen schreiben.

2. Beweisvorschlag (Mit systematischem Probieren):

Im folgenden Baumdiagramm ist die Lösung der Aufgabe durch systematisches Probieren dargestellt. Die Zahlen in den Kästchen werden von links nach rechts mit a_1 bis a_5 bezeichnet. An jedem Knoten des Baumdiagramms steht die Summe der noch nicht festgelegten Summanden. An den einzelnen Ästen stehen die Möglichkeiten für die jeweils nächsten Summanden. Hierbei wurde beachtet:

- Die Zahl a_1 kann nicht größer als 2 sein, weil sonst der Reihe nach $a_2 \geq 2 \cdot 3 = 6$, $a_3 \geq 2 \cdot 6 = 12$, $a_4 \geq 2 \cdot 12 = 24$ und $a_5 \geq 2 \cdot 24 = 48$ und damit $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq 3 + 6 + 12 + 24 + 48 = 93 > 78$ folgen würde. Das kann nicht sein.
- Die Zahl a_i ($i = 2,3,4,5$) muss entsprechend der Bedingung der Aufgabe ein echtes Vielfaches des vorhergehenden a_{i-1} sein. Außerdem muss a_i ($i = 1,2,3,4$) ein *echter* Teiler der Summe $a_i + a_{i+1} + \dots + a_5$ sein, die an dem Knoten des Baumdiagramms steht, an dem der Ast mit a_i beginnt, denn jeder Summand dieser Summe ab dem zweiten ist Vielfaches seines vorhergehenden und damit sind alle Summanden Vielfache von a_i .



Das Baumdiagramm hat genau einen Pfad, der nach der Wahl von a_5 mit der Restsumme 0 endet. Dies entspricht der einzig möglichen Lösung $2 + 4 + 8 + 16 + 48 = 78$.

Aufgabe 5

Sophie und David vereinbaren folgendes Spiel: Abwechselnd wählen sie eine beliebige einstellige Primzahl und schreiben diese an die Tafel. Sophie beginnt. Das Spiel endet, sobald das Produkt dieser einstelligen Primzahlen an der Tafel größer als 2018 ist. Gewonnen hat, wer die letzte Primzahl an die Tafel geschrieben hat.

Kann Sophie oder kann David den Sieg erzwingen?

Lösung:

David kann den Sieg erzwingen, unabhängig davon wie Sophie spielt.

1. Beweisvorschlag (Durch Gewinnstrategie):

Die einstelligen Primzahlen sind 2, 3, 5 und 7. David gewinnt, wenn er folgende Strategie verfolgt:

- Schreibt Sophie die Zahl 2, so schreibt er danach die Zahl 7 an die Tafel.
- Schreibt Sophie die Zahl 3, so schreibt er 5 an die Tafel.
- Schreibt Sophie die Zahl 5, so schreibt er selbst 3 an die Tafel.
- Schreibt Sophie die Zahl 7, so schreibt er selbst danach 2 an die Tafel.

Das Produkt der beiden Zahlen an der Tafel ist nach zwei solchen Zügen entweder gleich $2 \cdot 7 = 7 \cdot 2 = 14$ oder $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15$. Nach zwei weiteren Zügen stehen vier Zahlen an der Tafel, deren mögliche Produkte $14 \cdot 14 = 196$, $14 \cdot 15 = 15 \cdot 14 = 210$ und $15 \cdot 15 = 225$ sind und Sophie ist an der Reihe. Sie kann mit ihrer nächsten Zahl höchstens den Wert $225 \cdot 7 = 1575$ erreichen, also nicht gewinnen. David hingegen erreicht mit seinem darauffolgenden Zug entsprechend seiner Strategie in jedem Fall mindestens den Produktwert $196 \cdot 14 = 2744$ ist. Er gewinnt damit das Spiel.

2. Beweisvorschlag (Durch Rückwärtsarbeiten):

Wenn das Produkt der Zahlen an der Tafel den Wert N hat und der Spieler, der an der Reihe ist, durch geschicktes Spiel den Sieg erzwingen kann, dann nennen wir N eine *Gewinnzahl*. Das Produkt N nennen wir eine *Verlustzahl*, wenn der andere Spieler, der nicht an der Reihe ist, durch geschicktes Spiel den Sieg erzwingen kann.

Die Zahlen N mit $N \geq 289$ sind **Gewinnzahlen**, denn ausgehend von einer solchen Zahl N kann der Spieler, der am Zug ist, die Zahl 7 an die Tafel schreiben und gewinnt, weil $7 \cdot N \geq 7 \cdot 289 = 2023 > 2018$ ist.

Die natürlichen Zahlen N mit $288 \geq N \geq 145$ sind **Verlustzahlen**, denn ausgehend von einer solchen Zahl N muss der Spieler, der am Zug ist, mindestens die Zahl 2 und höchstens die Zahl 7 an die Tafel schreiben und erhält damit als neues Produkt einen Wert zwischen $2 \cdot 145 = 290$ und $7 \cdot 288 = 2016$. Wie im vorigen Absatz beschrieben wurde, sind diese Zahlen alle Gewinnzahlen für den Gegner.

Die natürlichen Zahlen N mit $144 \geq N \geq 21$ **sind Gewinnzahlen**, denn ausgehend von einer solchen Zahl N kann der Spieler, der am Zug ist, eine einstellige Primzahl p an die Tafel schreiben, so dass $145 \leq p \cdot N \leq 288$ gilt.

Für $21 \leq N \leq 41$ wählt er nämlich $p = 7$, für $42 \leq N \leq 57$ wählt er $p = 5$, für $58 \leq N \leq 96$ wählt er $p = 3$ und für $97 \leq N \leq 144$ wählt er $p = 2$. In jedem Fall findet der Gegner eine Verlustzahl vor.

Die natürlichen Zahlen N mit $20 \geq N \geq 11$ **sind Verlustzahlen**, denn ausgehend von einer solchen Zahl N muss der Spieler, der am Zug ist, mindestens die Zahl 2 und höchstens die Zahl 7 an die Tafel schreiben und erhält damit als neues Produkt einen Wert zwischen $2 \cdot 11 = 22$ und $7 \cdot 20 = 144$. Diese Zahlen sind alle Gewinnzahlen für den Gegner.

Die natürlichen Zahlen N mit $10 \geq N \geq 2$ **sind Gewinnzahlen**, denn ausgehend von einer solchen Zahl N kann der Spieler, der am Zug ist, eine einstellige Primzahl p an die Tafel schreiben, so dass $11 \leq p \cdot N \leq 20$ gilt.

Für $N = 2$ wählt er nämlich $p = 7$, für $N = 3$ wählt er $p = 5$, für $4 \leq N \leq 6$ wählt er $p = 3$ und für $7 \leq N \leq 10$ wählt er $p = 2$. In jedem Fall findet der Gegner eine Verlustzahl vor.

Da Sophie beginnt, muss sie eine der Zahlen 2,3,5, oder 7 an die Tafel schreiben. Für diese Zahlen gilt $2 \leq N \leq 10$. Alle diese Zahlen sind Gewinnzahlen von David. Somit gewinnt David in jedem Fall.

Aufgabe 6

Ein Kreis mit Mittelpunkt M hat zwei Sehnen \overline{AB} und \overline{CD} , die sich senkrecht schneiden. Der Punkt E entsteht durch Spiegelung von A am Punkt M , der Punkt F durch Spiegelung von B an der Geraden CD .

Zeige: Die Punkte C , E , D und F sind die Eckpunkte eines Parallelogramms.

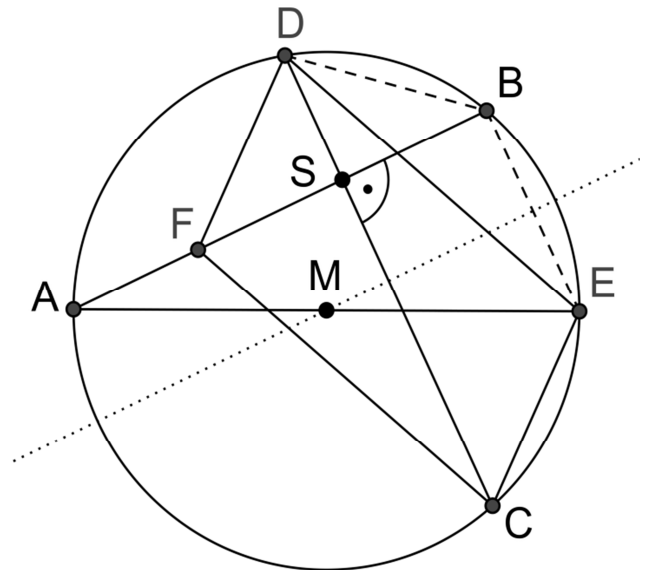
1. Beweisvorschlag (Mit Kongruenzsatz):

Sei S der Schnittpunkt der Sehnen \overline{AB} und \overline{CD} .

Da E durch Spiegelung von A am Mittelpunkt M entsteht, gilt $\overline{AM} = \overline{ME}$ und M liegt auf AE . Folglich ist \overline{AE} Durchmesser des Kreises.

Der gegebene Kreis ist also Thaleskreis über \overline{AE} . Da B auf diesem liegt, gilt: $\sphericalangle ABE = 90^\circ$.

Entsprechend der Aufgabenstellung ist auch $\sphericalangle ASC = 90^\circ$, denn die beiden Sehnen \overline{AB} und \overline{CD} schneiden sich senkrecht.



Da $\sphericalangle ABE$ und $\sphericalangle ASC$ gleich weite Stufenwinkel sind, folgt, dass die Strecken \overline{EB} und \overline{CD} parallel sind. Deshalb ist das Viereck $CEBD$ ein Trapez.

Behauptung: In diesem Trapez $CEBD$ sind die gegenüberliegenden Seiten \overline{BD} und \overline{EC} gleichlang und die Innenwinkel $\sphericalangle ECD$ und $\sphericalangle CDB$ gleich weit.

Beweis der Behauptung: Die Gerade durch den Mittelpunkt M des Kreises, die senkrecht zu \overline{CD} und damit auch zu \overline{EB} ist, ist eine Symmetrieachse des Kreises. Spiegelt man B bzw. D an dieser Geraden, so liegen die Bildpunkte auf den Geraden BE bzw. DC und auch auf dem Kreis. Die Bildpunkte sind also E bzw. C . Bei der Spiegelung bleiben aber Streckenlängen und Winkelweiten erhalten. Daraus folgt die Behauptung.

Nun zurück zum Beweis. Die Dreiecke SBD und SFC sind kongruent zueinander, da sie die Seite \overline{DS} gemeinsam haben, da $\overline{BS} = \overline{FS}$ gilt und da die Winkel $\sphericalangle BSD$ und $\sphericalangle CSF$ beide rechte Winkel sind (Kongruenzsatz SWS). Es folgt $\overline{BD} = \overline{FC}$ und $\sphericalangle FDC = \sphericalangle CDB$.

Aus der Behauptung ergibt sich daraus $\overline{EC} = \overline{FD}$ und $\sphericalangle FDC = \sphericalangle ECD$. Somit sind $\sphericalangle FDC$ und $\sphericalangle ECD$ gleich weite Wechselwinkel. Also ist \overline{EC} parallel zu \overline{FD} . Ein Viereck mit gleich langen und parallelen gegenüberliegenden Seiten ist aber ein Parallelogramm. Somit ist das Viereck $CEDF$ ein Parallelogramm.

Bemerkung:

Folgendermaßen ergibt sich eine alternative Begründung für die im Beweis aufgestellte Behauptung, dass $\overline{BD} = \overline{EC}$ und $\sphericalangle CDB = \sphericalangle ECD$ ist:

Da EB parallel zu CD ist, ist $\sphericalangle BGD = \beta$ (Wechselwinkel), $\sphericalangle DGM = 180^\circ - \beta$ (Nebenwinkel) und daher

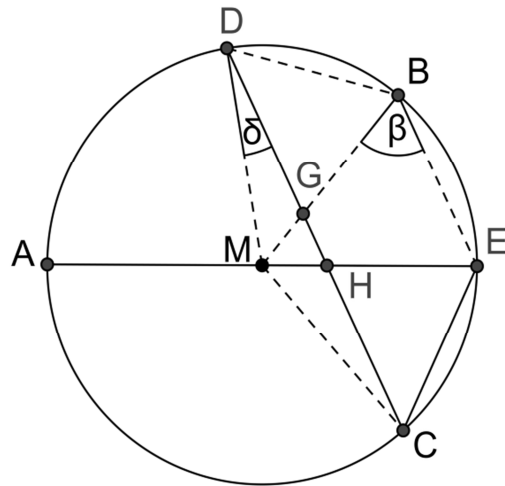
$$\begin{aligned}\sphericalangle BMD &= \sphericalangle GMD \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \beta) - \delta \\ &\quad \text{(Innenwinkelsumme im} \\ &\quad \text{Dreieck } MGD). \\ &= \beta - \delta.\end{aligned}$$

Da die Dreiecke BME und DMC gleichschenkelig mit Spitze bei M sind, folgt weiter, dass $\sphericalangle BEM = \beta$ und $\sphericalangle DCM = \delta$ ist.

Daher kann man wie oben herleiten, dass $\sphericalangle CME = \beta - \delta$ ist.

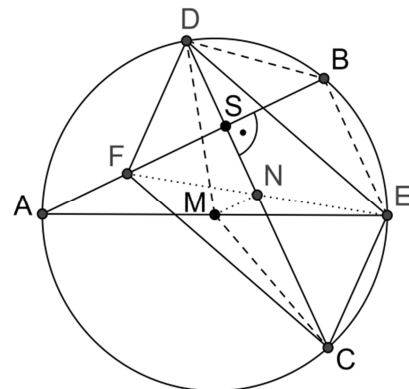
Die Dreiecke BDM und CEM sind somit nach Kongruenzsatz SWS kongruent.

Es folgt $\overline{BD} = \overline{EC}$. Ebenso erhält man aus der genannten Kongruenz $\sphericalangle MDB = \sphericalangle ECM$ und daher auch $\sphericalangle CDB = \sphericalangle MDB - \delta = \sphericalangle ECM - \delta = \sphericalangle ECD$. Somit folgt die Behauptung.



2. Beweisvorschlag (Mit Punktsymmetrie):

Es sei N der Schnittpunkt der Diagonalen \overline{EF} und \overline{CD} des Vierecks $CEDF$. Es wird gezeigt, dass N der Mittelpunkt der beiden Diagonalen ist. Ein Viereck, in dem sich die Diagonalen in ihren jeweiligen Mittelpunkten schneiden, ist punktsymmetrisch zum Diagonalschnittpunkt und daher ein Parallelogramm. Somit folgt die Behauptung.



Wie im 1. Beweisvorschlag lässt sich zeigen, dass \overline{EB} parallel zu \overline{CD} ist.

Der Punkt F ist Spiegelpunkt von B bezüglich \overline{CD} .

Daraus folgt:

- \overline{FB} ist senkrecht \overline{CD} . Da nach Aufgabenstellung auch \overline{AB} senkrecht \overline{CD} ist, folgt, dass F auf \overline{AB} liegt.
- S ist Mittelpunkt von \overline{FB} .

Da \overline{EB} parallel zu \overline{CD} ist, ist auch \overline{NS} parallel zu \overline{EB} . Somit ist \overline{NS} die Mittelparallele im Dreieck FEB . Folglich ist N Mittelpunkt der Strecke \overline{EF} .

Da M der Mittelpunkt von \overline{AE} ist, ist \overline{MN} die Mittelparallele in Dreieck AEF . Insbesondere ist \overline{MN} parallel zu AB und steht demnach senkrecht zu CD .

Da $\overline{MC} = \overline{MD}$ ist Dreieck MCD gleichschenkelig mit Basis \overline{CD} .

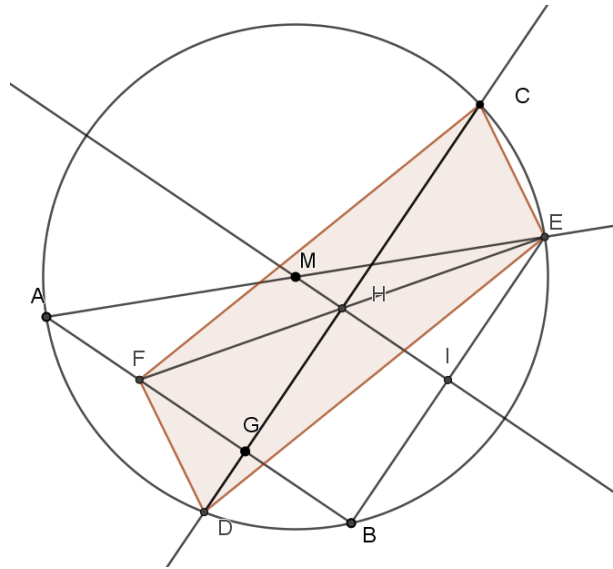
Die Strecke \overline{MN} ist die Höhe auf der Basis in diesem Dreieck.

Daraus folgt, dass N Mittelpunkt von \overline{CD} ist. Somit schneiden sich die Diagonalen \overline{CD} und \overline{EF} des Vierecks $CEDF$ in ihrem jeweiligen Mittelpunkt.

Daher ist das Viereck $CEDF$ ein Parallelogramm.

3. Beweisvorschlag (Mit Hilfsgerade orthogonal zu CD):

Wie im 1. Beweisvorschlag lässt sich zeigen, dass \overline{EB} parallel zu \overline{CD} ist. Sei G der Schnittpunkt von \overline{CD} mit \overline{FB} und H der Mittelpunkt der Sehne \overline{CD} . Es ist zu zeigen, dass H auch der Mittelpunkt von \overline{EF} ist. Dann halbieren sich die Diagonalen \overline{CD} und \overline{EF} im Punkt H und folglich ist das Viereck $CFDE$ ein Parallelogramm.



Da H der Mittelpunkt der Sehne \overline{CD} ist, ist \overline{MH} eine Mittelsenkrechte im gleichschenkligen Dreieck MDC . Insbesondere ist die Gerade MH orthogonal zu \overline{CD} und damit auch zu \overline{EB} .

Sei I der Schnittpunkt von MH mit EB . Dann ist \overline{MI} auch Mittelsenkrechte im gleichschenkligen Dreieck MBE und insbesondere ist I Mittelpunkt der Sehne \overline{EB} . Das Viereck $GBIH$ hat vier rechte Winkel, ist also ein Rechteck.

Da F durch Spiegelung von B an der Geraden CD entstanden ist, ist $\overline{GB} = \overline{FG}$ und FG ist orthogonal zu CD .

Nach dem Kongruenzsatz SWS sind die beiden Dreiecke FGH und HIE kongruent:

- $\overline{FG} = \overline{HI}$, denn $\overline{FG} = \overline{GB} = \overline{HI}$, da $GBIH$ ein Rechteck ist.
- $\overline{GH} = \overline{IE}$, denn $\overline{GH} = \overline{BI} = \overline{IE}$, da $GBIH$ ein Rechteck und I Mittelpunkt von \overline{EB} ist.
- $\sphericalangle FGH = \sphericalangle HIE = 90^\circ$.

Aus der Kongruenz der beiden Dreiecke folgt insbesondere $\overline{FH} = \overline{HE}$, also ist H der Mittelpunkt der Sehne \overline{EF} . Das war zu zeigen.