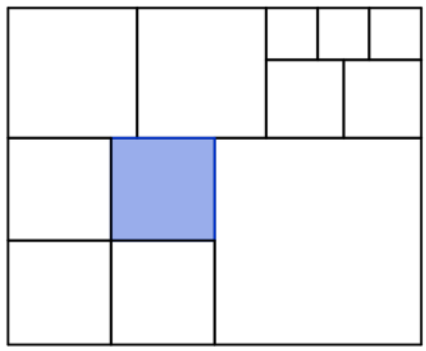
Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg
Musterlösungen 1. Runde 2016/2017

Aufgabe 1

Das abgebildete Rechteck ist in zwölf Quadrate zerlegt. Das gefärbte Quadrat hat einen Flächeninhalt von einem Quadratmeter.



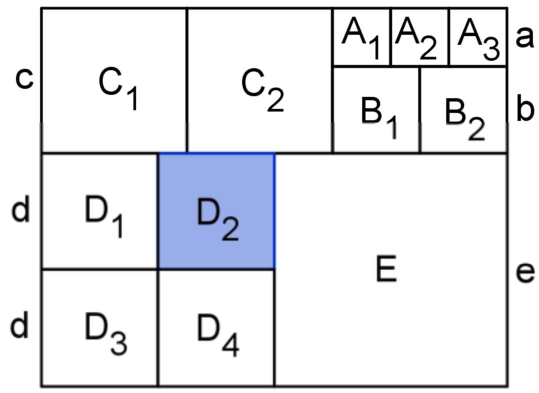
Wie groß ist der Flächeninhalt des ganzen Rechtecks?

Lösung:

Das ganze Rechteck hat den Flächeninhalt 13 Quadratmeter.

1. Beweisvorschlag:

Die zwölf Quadrate werden wie in der Abbildung mit A_1, A_2, A_3, B_1, …, E bezeichnet. Weil die Quadrate A_1 und A_2 bzw. A_2 und A_3 jeweils eine Seite gemeinsam haben, haben sie alle drei die gleiche Seitenlänge a.



Gleiches gilt für die Quadrate B_1 und B_2 mit Seitenlänge b, C_1 und C_2 mit Seitenlänge c und D_1, D_2, D_3 und D_4 mit Seitenlänge d. Das Quadrat E hat die Seitenlänge e.

Im folgenden sind alle Längenangaben in Metern (m) angegeben.
Weil der Flächeninhalt von D_2 ein Quadratmeter ist, ist $d = 1$. Die zwei im Bild rechten Seiten der Quadrate D_2 und D_4 bilden zusammen eine Seite von E. Deswegen ist $e = 2 \cdot d = 2$.

Weiter bilden die drei in der Abbildung unteren Seiten der Quadrate A_1, A_2 und A_3 zusammen eine Strecke, die genauso lang ist wie die zwei in der Abbildung oberen Seiten der Quadrate B_1 und B_2 zusammen. Daher gilt $3 \cdot a = 2 \cdot b$ (1).
Weil außerdem eine Seite des Quadrats C_2 den zwei im Bild linken Seiten der Quadrate A_1 und B_1 zusammen entspricht, gilt auch $c = a + b$ (2).

Schließlich bilden die drei oberen Seiten der Quadrate D_1, D_2 und E zusammen eine Strecke derselben Länge wie die vier unteren Seiten der Quadrate C_1, C_2, B_1 und B_2 zusammen.

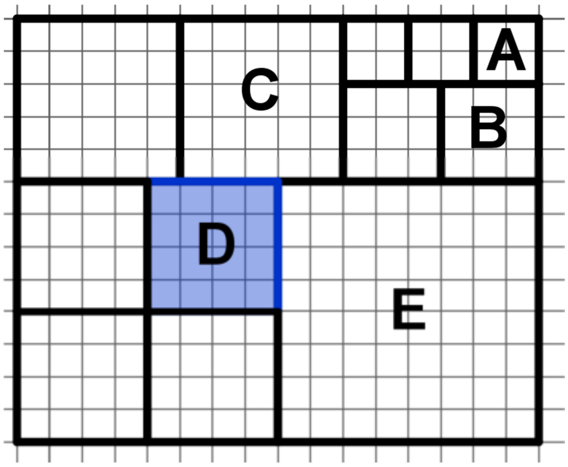
Somit gilt $2 \cdot c + 2 \cdot b = 2 \cdot d + e = 2 \cdot 1 + 2 = 4$. Setzt man in die letzte Gleichung zunächst (2) und dann (1) ein, so ergibt sich:
$4 = 2 \cdot c + 2 \cdot b = 2 \cdot (a + b) + 2 \cdot b = 2 \cdot a + 2 \cdot 2 \cdot b = 2 \cdot a + 2 \cdot 3 \cdot a = 8 \cdot a.$

Dies ergibt $a = \frac{4}{8} = 0{,}5$ und mit (1) erhält man $b = 3 \cdot a : 2 = 0{,}75.$

Das gesamte Rechteck hat daher die Seitenlängen $d + d + e = 4$ und
$a + b + e = 0{,}5 + 0{,}75 + 2 = 3{,}25.$
Das Rechteck hat daher den Flächeninhalt $4\text{m} \cdot 3{,}25\text{m} = 13\text{m}^2.$

2. Beweisvorschlag:

Auf Karopapier kann man die Anordnung der Quadrate und damit das Rechteck maßstäblich zeichnen (s. Abbildung).
Im folgenden werden alle Seitenlängen in Kästchenlängen angegeben.
Man beginnt mit Quadrat A mit einer Seitenlänge von 2; damit sind die beiden offenbar gleichgroßen Quadrate links neben A auch eindeutig festgelegt. Da das mit B bezeichnete Quadrat genauso groß ist wie sein linkes Nachbarquadrat, ergibt sich für diese beiden Quadrate notwendigerweise eine Seitenlänge von 6 : 2 = 3.



Ebenso ist damit die Seitenlänge des Quadrats C und seines linken Nachbarn mit (2 + 3) = 5 festgelegt.
Das gefärbte Quadrat D und die drei ebenso großen Quadrate links, links-unten und unterhalb von D bilden offenbar ein Quadrat, das genauso groß ist wie E. Demnach muss die Seitenlänge von E genau der halben gesamten Rechteckbreite, also (3 + 3 + 5 + 5) : 2 = 8 entsprechen.
Für das Quadrat D ergibt sich dann die Seitenlänge sich dann 8 : 2 = 4.
Ausgehend von Quadrat A sind die Größen der anderen Quadrate also eindeutig festgelegt und das gesamte Rechteck lässt sich maßstäblich zeichnen.

Im gewählten Maßstab hat das Rechteck somit die Seitenlängen 16 und 13 und das gefärbte Quadrat hat die Seitenlänge 4.
Das Verhältnis der gesamten Rechteckfläche zur gefärbten Quadratfläche ist in diesem Fall (16 x 13) : (4 x 4) = 13. Dieses Verhältnis bleibt bei jeder maßstäblichen Darstellung gleich.
Da in dem in der Aufgabe beschriebenen Rechteck das gefärbte Quadrat den Flächeninhalt 1 Quadratmeter hat, hat das gesamte Rechteck den Flächeninhalt 13 Quadratmeter.

Aufgabe 2

Luisa wirft gleichzeitig vier Spielwürfel. Sie will mit den vier gewürfelten Augenzahlen als Ziffern eine vierstellige Zahl bilden, die keine Primzahl ist.
Ist dies immer möglich?

Antwort:

Ja, Luisa kann stets eine vierstellige Zahl bilden, die keine Primzahl ist.

Beweisvorschlag:

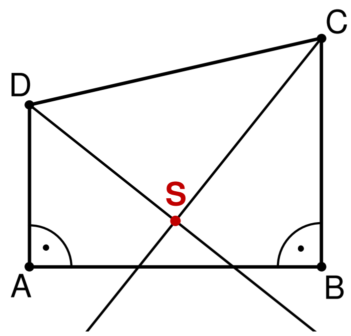
Falls eine der vier gewürfelten Augenzahlen eine 2, 4 oder 6 ist, kann Luisa eine vierstellige gerade Zahl mit dieser Ziffer als Einerziffer bilden. Diese Zahl ist keine Primzahl.
Falls eine der vier gewürfelten Augenzahlen eine 5 ist, kann Luisa diese Ziffer als Einerziffer der vierstelligen Zahl wählen. Die vierstellige Zahl ist dann durch 5 teilbar und daher keine Primzahl.
Damit bleiben nur die Fälle zu untersuchen, bei denen Luisa nur die Augenzahlen 1 oder 3 würfelt. Diese sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Anzahl 1er	Anzahl 3er	Luisa kann folgende Zahlen bilden, die keine Primzahl sind:
4 oder 0	0 oder 4	$1111 = 11 \cdot 101$, $3333 = 3 \cdot 1111$
3	1	Die Quersumme der Zahlen, die Luisa bilden kann, ist in jedem Fall 6. Also ist jede der vierstelligen Zahlen durch 3 teilbar. Z.B. $1113 = 3 \cdot 371$. Andere Möglichkeiten: $1131 = 3 \cdot 377$, $1311 = 3 \cdot 437$, $3111 = 3 \cdot 1037$
2	2	Luisa kann z.B. die Zahl 1133 bilden. $1133 = 11 \cdot 100 + 33$ ist durch 11 teilbar. Das kann man auch mit der Elferregel nachweisen, denn die alternierende Quersumme ist $1 - 1 + 3 - 3 = 0$. Andere Möglichkeiten: $1313 = 13 \cdot 101$, $3113 = 11 \cdot 283$, $1331 = 11 \cdot 121$, $3131 = 31 \cdot 101$, $3311 = 11 \cdot 301$
1	3	Luisa kann die vier Zahlen 1333, 3133, 3313 oder 3331 bilden. Bei keiner der vier Zahlen hilft eine einfache Teilbarkeitsregel. Man muss die Teilbarkeit einzeln überprüfen. Luisa kann z.B. $1333 = 31 \cdot 43$ oder $3133 = 13 \cdot 241$ bilden. (Demgegenüber sind 3313 oder 3331 Primzahlen.)

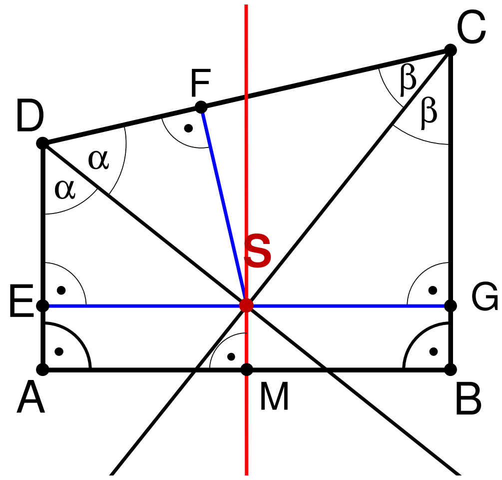
Damit kann Luisa in jedem Fall eine Zahl bilden, die keine Primzahl ist.

Aufgabe 3

Im nebenstehenden Trapez ABCD schneiden sich die Winkelhalbierenden der Winkel $\sphericalangle ADC$ und $\sphericalangle DCB$ im Punkt S.
Zeige, dass S auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegt.



1. Beweisvorschlag (Ortslinieneigenschaft der Winkelhalbierenden):

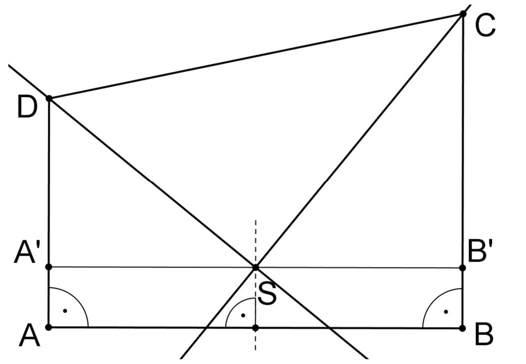


Sei EG Parallele zu AB durch S. Dann steht EG senkrecht auf AD und BC. Somit ist SE Lot von S auf AD und SG Lot von S auf BC.
Der Beweis nutzt folgende bekannte Ortslinieneigenschaft der Winkelhalbierenden:
Jeder Punkt der Winkelhalbierenden ist von den beiden Schenkeln gleich weit entfernt.
Für die gegebene Figur bedeutet dies:
1) Der Punkt S ist von AD und DC gleich weit entfernt, da er auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ADC$ liegt. Die Lote ES und SF von S auf AD bzw. CD sind also gleich lang. Es gilt also $\overline{ES} = \overline{SF}$. (1)
2) Der Punkt S ist von DC und BC gleich weit entfernt, da er auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle DCB$ liegt. Es gilt also $\overline{SF} = \overline{SG}$. (2)

Aus (1) und (2) folgt: $\overline{ES} = \overline{SG}$.
Das Viereck ABGE bildet ein Rechteck, bei dem S die Mitte der Seite EG ist. Die Mittelsenkrechte von AB, verläuft durch die Mitte von EG, also liegt S auf der Mittelparallelen von AB.

2. Beweisvorschlag (mit ähnlichen Dreiecken):

Wir wählen A' auf AD und B' auf BD so, dass die Strecke A'B' parallel zu AB ist und durch den Punkt S verläuft. Weil nun die Mittelsenkrechten von AB und A'B' zusammenfallen, genügt es zu zeigen, dass S der Mittelpunkt von A'B' ist, dass also A'S und SB' die gleiche Länge haben.



Im Viereck A'B'CD ist beträgt die Summe der Innenwinkel 360°. Da die Innenwinkel bei A' und B' rechte Winkel sind, folgt:

$\sphericalangle A'DC + \sphericalangle DCB' = 180°.$ (1)

Da DS den Winkel $\sphericalangle A'DC$ halbiert und CS den Winkel $\sphericalangle DCB'$ halbiert, folgt:

$\sphericalangle SDC + \sphericalangle DCS = 90°.$ (2)

Die Summe der Innenwinkel im Dreieck SCD beträgt 180°. Mit (2) erhält man:

$\sphericalangle CSD = 90°.$ (3)

Die Dreiecke A'SD und SCD sind ähnlich, da sie jeweils in zwei Innenwinkeln übereinstimmen:

$\sphericalangle SA'D = \sphericalangle CSD = 90°$ und $\sphericalangle A'DS = \sphericalangle SDC = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle A'DC.$

Auch die Dreiecke SCD und B'CS sind ähnlich, da sie jeweils in zwei Innenwinkeln übereinstimmen: $\sphericalangle CSD = \sphericalangle CB'S = 90°$ und $\sphericalangle DCS = \sphericalangle SCB' = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle DCB'.$

Folglich sind die Dreiecke A'SD, SCD und B'CS ähnlich und einander entsprechende Seiten stehen im gleichen Verhältnis zueinander:

$\frac{\overline{A'S}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{CD}}$ (Dreiecke A'SD und SCD) (4)

und

$\frac{\overline{B'S}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$ (Dreiecke B'SC und SCD) (5)

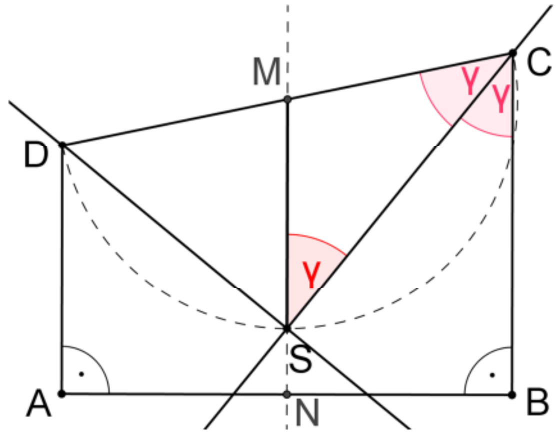
Multipliziert man Gleichung (4) mit $\overline{SC}$ und Gleichung (5) mit $\overline{SD}$, dann erhält man

$\overline{A'S} = \frac{\overline{SD} \cdot \overline{SC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{SC} \cdot \overline{SD}}{\overline{CD}} = \overline{B'S}.$ Somit ist die Behauptung bewiesen.

3. Beweisvorschlag (mit Satzes des Thales):

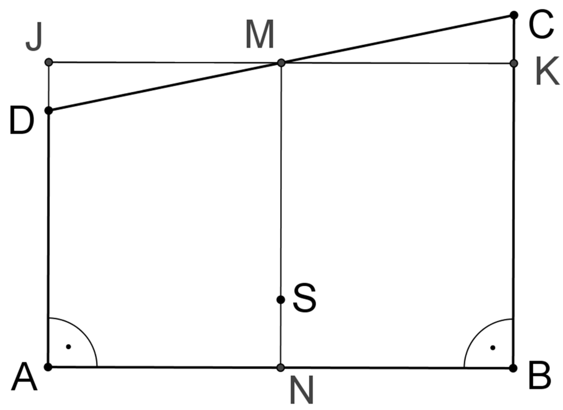
Mit M wird der Mittelpunkt der Strecke CD bezeichnet.
Wie im 1. Beweisvorschlag wird gezeigt, dass $\sphericalangle \mathrm{CSD} = 90°$ gilt, dass also das Dreieck CDS rechtwinklig mit rechtem Winkel bei S ist.

Aus der Umkehrung des Satzes des Thales folgt daher, dass S auf einem Halbkreis über dem Durchmesser CD mit Mittelpunkt M liegt.



Die Strecken MS und MC sind demnach Radien des Thaleskreises und es gilt: $\overline{\mathrm{MS}} = \overline{\mathrm{MC}}$.
Somit ist das Dreieck MSC gleichschenklig.
Aus dem Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke folgt dann: $\gamma = \sphericalangle \mathrm{CSM} = \sphericalangle \mathrm{MCS}$.
Da CS den Winkel $\sphericalangle \mathrm{DCB}$ halbiert, gilt auch: $\gamma = \sphericalangle \mathrm{SCB}$.
Die Winkel $\sphericalangle \mathrm{CSM}$ und $\sphericalangle \mathrm{SCB}$ sind somit Wechselwinkel mit gleicher Weite.
Aus der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes folgt daraus, dass die Strecken SM und BC parallel sind. Die Gerade durch MS schneidet AB im Punkt N. Da MS und BC parallel sind, sind MN und AB orthogonal. Man muss zeigen, dass N der Mittelpunkt von AB ist, dann ist die Gerade MN die Mittelsenkrechte von AB und der Beweis ist abgeschlossen.

Um zu zeigen, dass N der Mittelpunkt von AB ist, zeichnen wir die Parallele zu AB durch M. Sie schneidet die Gerade AD in J und die Strecke BC in K. Dann sind die Dreiecke MKC und DMJ kongruent: Der Winkel bei M ist in beiden gleich weit, beide Dreiecke haben einen rechten Winkel und die Seiten MD und MC sind gleich lang, da M der Mittelpunkt von CD ist. Somit ist $\overline{MK} = \overline{MJ}$. Da die Vierecke NBKM und ANMJ Rechtecke sind, folgt $\overline{AN} = \overline{NB}$. Somit ist N der Mittelpunkt von AB und alles ist bewiesen.



Variante des 3. Beweisvorschlags:

Man kommt schneller zum Ziel, wenn man zum Beweis, dass N der Mittelpunkt von AB ist, den Satz von der Mittelparallelen benutzt. Dieser besagt, dass im obigen Trapez die Gerade ML eine Parallele zu BC bzw. AD ist, wenn M der Mittelpunkt von CD und L der Mittelpunkt von AB ist. Diese Parallele durch die Mittelpunkte heißt Mittelparallele. Dieser Satz darf hier ohne Beweis benutzt werden, ein Beweis des Satzes erfolgt in der Bemerkung weiter unten.

Da nach obigem Beweis MS und BC parallel sind und es nur eine Parallele zu BC durch M gibt, muss die Gerade MS identisch mit der Mittelparallele sein. Somit sind die Punkte L und N identisch. Da L der Mittelpunkt von AB ist, ist somit N ist der Mittelpunkt von AB – das war zu beweisen.

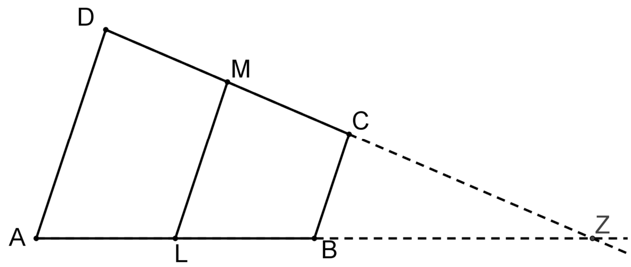
Bemerkung:

Der Satz über die Mittelparallele in einem Trapez darf ohne weitere Begründung verwendet werden. Der Vollständigkeit halber wird ein Beweis hier angegeben:

Satz über die Mittelparallele: *In einem Trapez ABCD, in dem AD parallel zu BC ist, werden die Mittelpunkte der Strecken AB und CD mit L bzw. M benannt. Dann ist die Gerade ML parallel zu den beiden Seiten AD und BC.*

Beweis: Falls im Viereck ABCD auch AB parallel zu CD ist, so ist das Viereck ein Parallelogramm. Dann hat das Viereck ALMD zwei gleich lange, parallele Gegenseiten, nämlich AL und MD. Es ist also selbst ein Parallelogramm und die Behauptung folgt sofort.

Andernfalls schneiden sich die Geraden AB und CD in einem Punkt Z.
Aufgrund des Strahlensatzes gilt hier: $\frac{\overline{ZC}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BA}}$.
Weil L und M Mittelpunkte von AB bzw. CD sind, gilt dann weiter: $\frac{\overline{ZC}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BA}} = \frac{2 \cdot \overline{CM}}{2 \cdot \overline{BL}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{BL}}$.



Mit der Umkehrung des Strahlensatzes folgt hieraus aber, dass ML parallel zu CB ist, also die Behauptung.

Aufgabe 4

Maximilian bastelt für seine Schwester Theresa aus roten und schwarzen Perlen eine geschlossene Kette. Zwischen zwei gleichfarbigen Perlen fügt er ein goldenes Zwischenstück ein, zwischen zwei verschiedenfarbigen Perlen ein silbernes Zwischenstück. Theresa stellt fest, dass ihre Kette gleich viele goldene wie silberne Zwischenstücke hat.
Zeige, dass die Anzahl der Perlen ein Vielfaches von 4 ist.

1. Beweisvorschlag:

Die Anzahl der silbernen Zwischenstücke wird mit s bezeichnet, die Zahl der goldenen Zwischenstücke mit g. Nach Voraussetzung ist $s = g$, die Zahl der Zwischenstücke ist also 2s. Da zwischen zwei Perlen stets ein Zwischenstück eingefügt wird, gibt es gleich viele Zwischenstücke wie Perlen. Es gibt also 2s Perlen.
Wir starten bei einer beliebigen roten Perle und nennen diese Startperle.
Geht man von der Startperle aus entlang der Kette alle Perlen durch, so erreicht man die erste schwarze Perle nach dem ersten silbernen Zwischenstück, das man passiert. Denn dann wechselt die Farbe erstmals. Danach erreicht man erst wieder eine rote Perle, wenn das zweite silberne Zwischenstück passiert wird. Nach dem dritten silbernen Zwischenstück folgt wieder ein Farbwechsel, also eine schwarze Perle usw.

Allgemein ist die Farbe einer Perle bei dem Weg um die Kette von der Startperle ausgehend genau dann rot, wenn man eine gerade Anzahl an silbernen Zwischenstücken passiert hat, nach einer ungeraden Anzahl von silbernen Zwischenstücken ist die folgende Perle schwarz.
Da man nach einer vollständigen Umrundung der Kette wieder bei der roten Startperle ankommt, muss eine gerade Anzahl an silbernen Zwischenstücken passiert worden sein.
Somit ist s gerade: $s = 2m$ mit einer natürlichen Zahl m. Die Anzahl der Perlen der Kette ist daher $2s = 4m$, also ein Vielfaches von 4.

2. Beweisvorschlag:

Die Anzahl der goldenen Zwischenstücke wird mit g bezeichnet.

Da zwischen zwei Perlen stets ein Zwischenstück eingefügt wird und genauso viele silberne wie goldene Zwischenstücke benutzt werden, insgesamt also 2g Zwischenstücke, muss es insgesamt 2g Perlen geben.

Ersetzt man nun jedes goldene Zwischenstück, das zwischen zwei roten Perlen ist, durch eine schwarze Perle und jedes goldene Zwischenstück, das zwischen zwei schwarzen Perlen ist, durch eine rote Perle und entfernt zusätzlich alle silbernen Zwischenstücke, so erhält man eine neue Kette, in der sich schwarze und rote Perlen abwechseln. Die Anzahl der Perlen dieser neuen Kette muss also gerade sein und ist gleich $2g + g = 3g$.

Das bedeutet, dass g selbst gerade sein muss: $g = 2m$ mit einer natürlichen Zahl m. Die Anzahl der Perlen der ursprünglichen Kette ist daher $2g = 4m$, also ein Vielfaches von 4.

Aufgabe 5

Bestimme alle Jahreszahlen N, für die gilt:
N – 2000 ist eine Zweierpotenz und N ist die Differenz zweier Zweierpotenzen.

Lösung:

Die einzigen Jahreszahlen, die beide Bedingungen erfüllen, sind 2016 und 2032.

1. Beweisvorschlag:

Sei N eine Jahreszahl mit den genannten Eigenschaften. Dann gibt es also nicht negative ganze Zahlen k, m und n so, dass

(1) $\mathrm{N} - 2000 = 2^{\mathrm{k}}$ und
(2) $\mathrm{N} = 2^{\mathrm{m}} - 2^{\mathrm{n}}$ gilt.

Setzt man (2) in (1) ein, so folgt $2^{\mathrm{m}} - 2^{\mathrm{n}} - 2000 = 2^{\mathrm{k}}$, bzw.

(3) $2000 = 2^{\mathrm{m}} - 2^{\mathrm{n}} - 2^{\mathrm{k}}$.

Offenbar muss dabei m > n und m > k sein. Bezüglich der Größe von n und k werden nun drei Fälle unterschieden:

Fall 1: n > k

In diesem Fall ist n = k + i mit einer natürlichen Zahl i. Wegen m > n ist m = n + j mit einer natürlichen Zahl j, und daher ist m = k + i + j.
Zerlegt man 2000 in Primfaktoren, so erhält man $2000 = 2^4 \cdot 5^3$.
Aus (3) ergibt sich demnach: $2^4 \cdot 5^3 = 2^{\mathrm{k+i+j}} - 2^{\mathrm{k+i}} - 2^{\mathrm{k}} = 2^{\mathrm{k}} \cdot \left(2^{\mathrm{i+j}} - 2^{\mathrm{i}} - 1\right)$.
Da der Term in den Klammern ungerade ist, enthält er keinen Primfaktor 2, also muss wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung $2^{\mathrm{k}} = 2^4$ sein, also k = 4 und $\mathrm{N} = 2000 + 2^4 = 2016$.

Fall 2: k > n

In diesem Fall tauschen k und n in Gleichung (3) ihre Rollen. Es ist k = n + i und m = n + i + j mit natürlichen Zahlen i und j.
Aus (3) ergibt sich, analog zum ersten Fall: $2^4 \cdot 5^3 = 2^{\mathrm{n}} \cdot \left(2^{\mathrm{i+j}} - 1 - 2^{\mathrm{i}}\right)$, woraus n = 4 und $5^3 = 2^{\mathrm{i+j}} - 2^{\mathrm{i}} - 1$ folgt.
Mit der letzten Gleichung ergibt sich: $126 = 2^{\mathrm{i+j}} - 2^{\mathrm{i}} = 2^{\mathrm{i}} \cdot \left(2^{\mathrm{j}} - 1\right)$. Aus der Primfaktorzerlegung $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ folgt $2^{\mathrm{i}} = 2$, da $2^{\mathrm{j}} - 1$ ungerade ist. Also i = 1 und somit k = 5.
So erhält man die mögliche Jahreszahl $\mathrm{N} = 2000 + 2^5 = 2032$.

Fall 3: k = n

In diesem Fall ist k = n und m = k + j mit einer natürlichen Zahl j.
Aus (3) ergibt sich $2^4 \cdot 5^3 = 2^{\mathrm{k}} \cdot \left(2^{\mathrm{j}} - 1 - 1\right) = 2^{\mathrm{k}} \cdot \left(2^{\mathrm{j}} - 2\right)$.
Der Term $2^{\mathrm{j}} - 2$ kann offenbar nicht den Wert 0 haben, also ist j > 1 und man kann einen weiteren Faktor ausklammern: $2^4 \cdot 5^3 = 2^{\mathrm{k+1}} \cdot \left(2^{\mathrm{j-1}} - 1\right)$.

Hieraus folgen m = k = 3 und $5^3 = 2^{j-1} - 1$. Die letzte Gleichung lässt sich zu $126 = 2^{j-1}$umformen und besitzt offenbar keine ganzzahlige Lösung. Somit ergibt sich keine weitere Jahreszahl.

Damit sind alle möglichen Fälle betrachtet worden und nur N = 2016 und N = 2032 sind mögliche Lösungen.

Weil $2016 - 2000 = 2^4$ und $2016 = 2048 - 32 = 2^{11} - 2^5$ ist, erfüllt N = 2016 die Bedingungen der Aufgabe und ist wirklich eine Lösung.
Weil $2032 - 2000 = 2^5$ und $2032 = 2048 - 16 = 2^{11} - 2^4$ ist, erfüllt auch N = 2032 die Bedingungen der Aufgabe und ist ebenfalls eine Lösung.

2. Beweisvorschlag (mit Abschätzungen):

Wie im 1. Beweisvorschlag ergibt sich Gleichung (3) von diesem Beweisvorschlag, d.h.

$$2000 = 2^m - 2^n - 2^k \quad (*).$$

Fall 1: $m \geq 12$, also $2^m \geq 4096$

Wir werden zeigen dass dieser Fall nicht eintreten kann.

Wegen n < m und k < m ist sowohl 2^n als auch 2^k kleiner als 2^m. Nun gibt es folgende Möglichkeiten:

Fall 1 a: Wenn sowohl $2^n \leq 2^{m-2}$ als auch $2^k \leq 2^{m-2}$ ist, dann ergibt sich

$$2^m - 2^n - 2^k \geq 2^m - 2 \cdot 2^{m-2} = 2^m - 2^{m-1} = 2^{m-1} \geq 2048$$

im Widerspruch zu (*). Dies ist also nicht möglich.

Fall 1 b: Wenn $2^n = 2^k = 2^{m-1}$ ist, dann folgt

$$2^m - 2^n - 2^k = 2^m - 2 \cdot 2^{m-1} = 0,$$

erneut im Widerspruch zu (*).

Fall 1 c: Nun bleibt nur noch die Möglichkeit, dass eine der beiden Zweierpotenzen 2^n und 2^k mit 2^{m-1} übereinstimmt, und die andere höchstens 2^{m-2} ist. Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir an, dass $2^n = 2^{m-1}$ ist und $2^k \leq 2^{m-2}$ (andernfalls sind in den folgenden Zeilen einfach n und k zu vertauschen). Nun ist also

$$2^m - 2^n - 2^k = 2^m - 2^{m-1} - 2^k = 2^{m-1} - 2^k = 2000.$$

Für $m \geq 13$ ist aber $2^{m-1} - 2^k \geq 2^{m-1} - 2^{m-2} = 2^{m-2} \geq 2^{11} = 2048 > 2000$, Widerspruch zu (*).
Für m = 12 ergibt sich

$$2^{m-1} - 2^k = 2048 - 2^k = 2000, \text{ also } 2^k = 48.$$

Die ist unmöglich, da 48 keine Zweierpotenz ist.

Fall 2: $m = 11$, also $2^m = 2048$

In diesem Fall ist $2^m - 2^n - 2^k = 2048 - 2^n - 2^k = 2000$, also

$$2^n + 2^k = 48.$$

Anhand einer Auflistung der kleinsten Zweierpotenzen (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...) erkennt man, dass
(1) $2^n = 16$ und $2^k = 32$ (d.h. $N = 2000 + 2^k = 2032$) oder
(2) $2^n = 32$ und $2^k = 16$ (d.h. $N = 2000 + 2^k = 2016$)
die beiden einzigen Möglichkeiten sind, die Zahl 2048 als Summe von zwei Zweierpotenzen zu schreiben. Eine der beiden Zweierpotenzen muss nämlich $2^5 = 32$ sein, da sonst die Summe zu kleine oder zu groß wird, damit ist die andere $48 - 2^5 = 2^4 = 16$.

3. Fall: $m \le 10$, also $2^m \le 1024$

Dies ist offenbar nicht möglich, da es (*) widerspricht.

Damit sind alle möglichen Fälle betrachtet worden und nur N = 2016 und N = 2032 sind mögliche Lösungen. Wie im 1. Beweisvorschlag rechnet man nach, dass diese beiden Jahreszahlen tatsächlich alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

3. Beweisvorschlag (mit Zweiersystem):

Bei Überlegungen zu Zweierpotenzen bietet das Dualsystem an, denn Zweierpotenzen sind die Stufenzahlen des Dualsystems. Die Zweierpotenz 2^n schreibt sich im Dualsystem, welches nur die Ziffern 0 und 1 benötigt, dann wie folgt:
$2^n = (100 \ldots 0000)_2$ mit n Ziffern 0. Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Summe von verschiedenen Zweierpotenzen schreiben. So schreibt sich etwa die Zahl 2000 im Dualsystem:

$$\begin{aligned} 2000 &= 1 \cdot 1024 + 1 \cdot 512 + 1 \cdot 256 + 1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &= (11111010000)_2 \end{aligned}$$

Auch die Differenz von zwei Zweierpotenzen besitzt eine einfache Dualzahldarstellung, wie zunächst das folgende Beispiel zeigt:
$2^7 - 2^3 = (10000000)_2 - (1000)_2 = (1111000)_2 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3$
Die Richtigkeit dieser Rechnung ist einfach aus der Probe ablesbar:
$(1111000)_2 + (1000)_2 = (2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3) + 2^3 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^4 =$
$2^6 + 2^5 + 2^5 = 2^6 + 2^6 = 2^7 = (10000000)_2$

Hilfreich für die Lösung der Aufgabe ist folgende Verallgemeinerung des Beispiels:

Hilfssatz:
Eine natürliche Zahl N ist genau dann Differenz von zwei verschiedenen Zweierpotenzen, wenn sich in ihrer Dualzahldarstellung einer Folge von ausschließlich Ziffer 1 eine Folge von ausschließlich Ziffer 0 (oder auch gar keine 0) anschließt. $(11....1100...00)_2$ oder auch $(11....11)_2$

Beweis des Hilfssatzes:
Mit m > k ≥ 0 ist N = $2^m - 2^k = 2^{m-1} + 2^{m-2} + \quad + 2^{k+1} + 2^k$ = $(11.....11100....00)_2$ mit m-k mal Ziffer 1 und k mal Ziffer 0. Auch hier ergibt sich die Richtigkeit aus einer entsprechenden Rechnung: $2^{m-1} + 2^{m-2} + \quad + 2^{k+1} + 2^k + 2^k = 2^{m-1} + 2^{m-2} + \quad + 2^{k+1} + 2^{k+1} = ... = 2^{m-1} + 2^{m-1} = 2^m$

Nun zur Lösung der Aufgabe:
2016 = $(11111100000)_2$ und 2032 = $(11111110000)_2$ sind die einzigen Jahreszahlen, welche die Bedingungen erfüllen.

Begründung:
Zur Lösung der Aufgabe genügt es, alle Zweierpotenzen $(10...0)_2$ zu finden, die zur Zahl 2000 = $(11111010000)_2$ addiert eine Zahl ergeben die eine Differenz von zwei Zweierpotenzen ist, die also eine Dualzahldarstellung besitzt, bei der sich einer Folge von ausschließlich Ziffern 1 eine Folge von ausschließlich Ziffern 0 anschließt (siehe Hilfssatz).
$(11111010000)_2 + (10...0)_2 = (11....1100...00)_2$ oder im Dezimalsystem: $2000 + 2^n = 2^m - 2^k$

Die besondere Dualzahldarstellung der Zahl 2000 = $(11111010000)_2$ lässt sofort die beiden einzigen Lösungen erkennen:
2000 + 16 = $(11111010000)_2 + (10000)_2 = (11111100000)_2$ = 2016
2000 + 32 = $(11111010000)_2 + (100000)_2 = (11111110000)_2$ = 2032

Werden kleinere Zweierpotenzen als 16 oder größere Zweierpotenzen als 32 addiert, so bleibt in der Dualzahldarstellung der Summe an der 6.Stelle von links die 0 vom Summanden 2000 stehen und es ergibt sich keine Differenz von Zweierpotenzen.

4. Beweisvorschlag (mit Teilbarkeit):

Zweierpotenzen sind 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, …
Sei N eine Jahreszahl mit den genannten Eigenschaften. Dann gibt es wie im ersten Beweisvorschlag nicht negative ganze Zahlen k, m und n so, dass $2000 = 2^m - 2^n - 2^k$.
Hierbei ist $N - 2000 = 2^k$ und $N = 2^m - 2^n$.

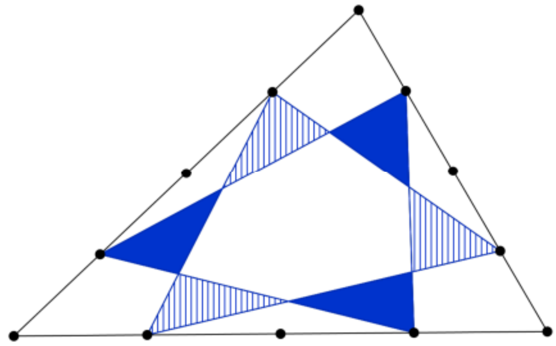
Da $2^m > 2000$ ist $m \geq 11$ und somit $2^m \geq 2048$. Dann muss aber 2^n oder 2^k mindestens 32 sein. Wären nämlich sowohl 2^n als auch 2^k höchstens 16, so $2^m - 2^n - 2^k \geq 2048 - 16 - 16 > 2000$. Das widerspricht $2000 = 2^m - 2^n - 2^k$.
Von den vier Zahlen 2000, 2^m, 2^n und 2^k sind also auf jeden Fall drei durch 16 teilbar. Da $2000 = 2^m - 2^n - 2^k$ muss auch die vierte Zahl durch 16 teilbar sein, man kann die Gleichung durch 16 dividieren und es ergibt sich $125 = 2^{m-4} - 2^{n-4} - 2^{k-4}$.
Hierbei ist (wegen $m \geq 11$) auf jeden Fall 2^{m-4} gerade. Da 2^n oder 2^k mindestens 32 ist, ist auch 2^{n-4} oder 2^{k-4} gerade. Dies bedeutet aber, dass die jeweils andere Zweierpotenz, also 2^{k-4} oder 2^{n-4} ungerade und somit 1 sein muss. Denn nach $125 = 2^{m-4} - 2^{n-4} - 2^{k-4}$ muss $2^{m-4} - 2^{n-4} - 2^{k-4}$ ungerade sein.

Fall 1: $2^{n-4} = 1$. Dann $n = 4$ und $126 = 2^{m-4} - 2^{k-4}$, somit $63 = 2^{m-5} - 2^{k-5}$. Es folgt $2^{k-5} = 1$, d.h. $k = 5$. Somit $N = 2000 + 2^k = \mathbf{2032}$ und $2032 = 2^m - 2^n = 2048 - 16$.

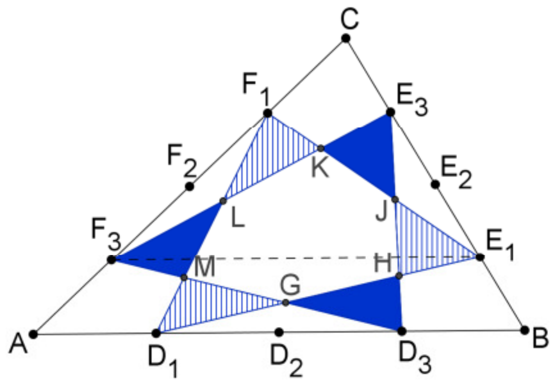
Fall 2: $2^{k-4} = 1$. Dann $k = 4$ und $126 = 2^{m-4} - 2^{n-4}$, somit $63 = 2^{m-5} - 2^{n-5}$. Es folgt $2^{n-5} = 1$, d.h. $n = 5$. Somit $N = 2000 + 2^k = \mathbf{2016}$ und $2016 = 2^m - 2^n = 2048 - 32$.

Aufgabe 6

Die Seiten eines Dreiecks sind jeweils in vier gleich lange Teilstrecken geteilt. Einige Teilpunkte sind wie in der Abbildung durch Strecken verbunden.
Zeige: Die Summe der Flächeninhalte der drei blau gefärbten Dreiecke ist genauso groß wie die Summe der Flächeninhalte der drei schraffierten Dreiecke.



1. Beweisvorschlag (mit Strahlensatz):



Die markierten Teilpunkte, die Eckpunkte des Dreiecks und die Schnittpunkte der gezeichneten Strecken seien wie in der Abbildung bezeichnet.
Dann gilt zunächst $\frac{\overline{\mathrm{CF_3}}}{\overline{\mathrm{CA}}} = \frac{3}{4} = \frac{\overline{\mathrm{CE_1}}}{\overline{\mathrm{CB}}}$. Mit der Umkehrung des Strahlensatzes folgt damit, dass AB parallel zu $\mathrm{F_3E_1}$ ist. Deswegen haben die beiden Dreiecke $\mathrm{AD_3F_3}$ und $\mathrm{D_1BE_1}$ dieselbe Höhe auf den zugehörigen Grundseiten $\mathrm{AD_3}$ bzw. $\mathrm{D_1B}$.
Da außerdem diese beiden Grundseiten gleiche Länge haben, nämlich die Länge $\frac{3}{4} \cdot \overline{\mathrm{AB}}$, haben die beiden Dreiecke $\mathrm{AD_3F_3}$ und $\mathrm{D_1BE_1}$ den gleichen Flächeninhalt:

(1) $\mathrm{A(AD_3F_3) = A(D_1BE_1)}$. Genauso folgert man:
(2) $\mathrm{A(BE_3D_3) = A(E_1CF_1)}$ und
(3) $\mathrm{A(CF_3E_3) = A(F_1AD_1)}$.

Also kann man für die Gesamtflächen A(blau) und A(schraffiert) der blauen bzw. schraffierten Dreiecke schließen:

$$\begin{aligned}\mathrm{A(blau)} &= \mathrm{A(ABC) - A(AD_3F_3) - A(BE_3D_3) - A(CF_3E_3) - A(GHJKLM)} \\ &= \mathrm{A(ABC) - A(D_1BE_1) - A(E_1CF_1) - A(F_1AD_1) - A(GHJKLM)} \\ &= \mathrm{A(schraffiert)}\end{aligned}$$

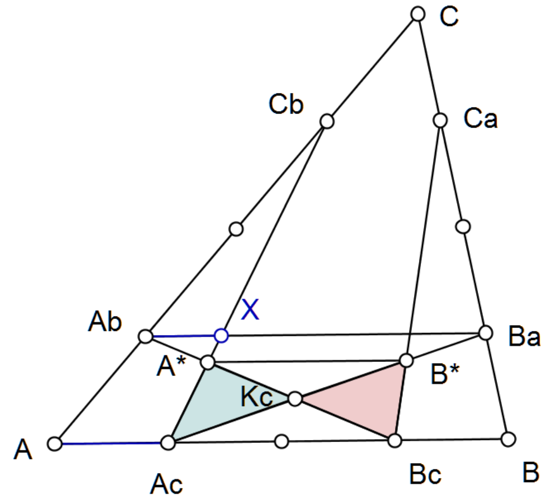
1. Bemerkung:

Tatsächlich haben die sechs in den Gleichungen (1), (2) und (3) betrachteten Dreiecke alle denselben Flächeninhalt, nämlich $\frac{3}{16} \cdot \mathrm{A(ABC)}$. Dies folgt beispielsweise für das Dreieck $\mathrm{AD_3F_3}$ folgendermaßen: Sei h_1 der Abstand von F_3 von der Seite AB, also im Dreieck AD_3F_3 die Höhe zur Grundseite AD_3. Ebenso sei h die Höhe zur Grundseite AB im Dreieck ABC. Die beiden Höhen sind parallel. Nach dem Strahlensatz ist $\frac{h_1}{h} = \frac{\overline{AF_3}}{\overline{AC}} = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{A(AD_3F_3)} &= \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{AD_3}} \cdot h_1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \overline{\mathrm{AB}} \cdot \frac{1}{4} \mathrm{h} \\ &= \frac{3}{16} \cdot \mathrm{A(ABC)}\end{aligned}$$

2. Beweisvorschlag (mit Flügelsatz für Trapeze):

In der nebenstehenden Abbildung sind nur die unteren beiden Dreiecke der sechs gefärbten Dreiecke markiert. Es wird gezeigt, dass diese beiden Dreiecke flächengleich sind. Es wird also mehr als nach Aufgabenstellung verlangt gezeigt: Alle sechs gefärbten Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt.



Zunächst wird gezeigt, dass die beiden oberen Eckpunkte A* und B* auf einer Parallelen zu AB liegen. Die Viertelsteilungspunkte A_b und B_a liegen auf einer Parallelen zu AB, nämlich auf der Mittelparallelen zur Mittelparallelen im Dreieck ABC.

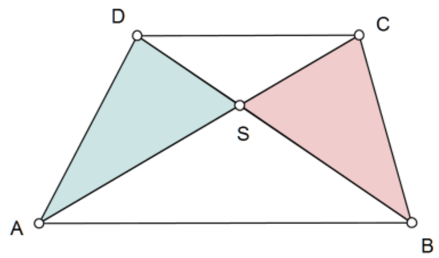
Nach dem 2. Strahlensatz ist $\frac{\overline{A_bX}}{\overline{AA_c}} = \frac{\overline{A_bC_b}}{\overline{AC_b}} = \frac{\frac{1}{2}b}{\frac{3}{4}b} = \frac{2}{3}$, also $\overline{A_bX} = \frac{2}{3}\cdot\overline{AA_c} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}c = \frac{1}{6}c$.

Damit folgt wieder aus dem zweiten Strahlensatz $\frac{\overline{A^*A_b}}{\overline{A^*B_c}} = \frac{\overline{A_bX}}{\overline{B_cA_c}} = \frac{\frac{1}{6}c}{\frac{2}{4}c} = \frac{1}{3}$, d.h. A* teilt die Strecke A_bB_c im Verhältnis 1:3. Somit ist der Abstand von A* zur Seite AB: $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot h = \frac{3}{16}h$. Ebenso ist der Abstand von B* zur Seite AB $\frac{3}{16}h$. A* und B* liegen also auf eine Parallelen zu AB.

Nun folgt die Flächengleichheit der Dreiecke $A_cK_cA^*$ und $B_cB^*K_c$ aus folgendem

Flügelsatz für Trapeze:

Gegeben ein Trapez ABCD mit Diagonalenschnittpunkt S. Dann sind die Dreiecke ASD und BCS flächengleich (Kurz: Die Fliege im Trapez hat flächengleiche Seitenflügel).



Beweis dieses Satzes: Die Dreiecke ABD und ABC sind flächengleich, da sie in der Grundseite AB und in der zugehörigen Höhe übereinstimmen. Zieht man den gemeinsamen Flächeninhalt von Dreieck ABS ab, so folgt die Behauptung.

2. Bemerkung:

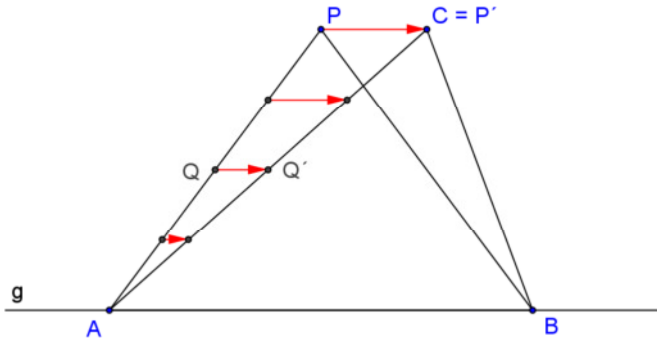
Den Flächeninhalt der sechs flächengleichen Dreiecke kann man auch berechnen: Es ist $\frac{\overline{A_bB_a}}{\overline{A_cB_c}} = \frac{\frac{3}{4}c}{\frac{1}{2}c} = \frac{3}{2} = \frac{\overline{A_bK_c}}{\overline{K_cB_c}}$. Somit teilt der Punkt K_c die Strecke A_bB_c im Verhältnis 3:2 und $\overline{K_cB_c} = \frac{2}{5}\cdot\overline{A_bB_c}$. Der Abstand von K_c zu AB ist also $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}h = \frac{1}{10}h$. Somit

$$A(A_cK_cA^*) = A(A_cB_cA^*) - A(A_cB_cK_c) = \frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{16}h)\cdot(\frac{1}{2}c) - \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{10}h)\cdot(\frac{1}{2}c) = \frac{7}{160}\cdot(\frac{1}{2}hc) = \frac{7}{160}\cdot A(ABC)$$

Dies gilt für jedes der sechs gefärbten Dreiecke.
Die Summe der Flächeninhalte der drei schraffierten bzw. der drei blau gefärbten Dreiecke ist also jeweils $\frac{21}{160}\cdot A(ABC)$.

3. Beweisvorschlag (mit Scherungen):

Man kann sich für jedes Dreieck ABC vorstellen, dass es durch eine besondere Abbildung, nämlich eine *Scherung*, aus einem gleichschenkligen Dreieck ABP entstanden ist (s. Abb.).



Definition und Eigenschaften einer Scherung:

Eine Scherung ist definiert durch eine Scherungsgerade g, einen Punkt P, der nicht auf g liegt, einen Punkt P´ auf der Parallelen zu g durch P (P´ ist der Bildpunkt von P) und folgende Vorschrift:

Jeder Punkt Q, der auf der gleichen Seite der Geraden g liegt wie P, wird auf einer Parallelen zu PP´ in die gleiche Richtung verschoben wie P, und zwar so weit, dass die Länge der Verschiebungsstrecke QQ´

(1) proportional zum Abstand des Punktes Q von g ist, und

(2) mit der Länge von PP´ übereinstimmt, wenn Q auf der gleichen Parallelen zu g liegt wie P.

Liegt Q auf g, so ist Q´ = Q. Liegt Q auf der anderen Seite der Geraden g, so ist die Verschiebungsrichtung umgekehrt.

Jede Scherung ist (hier ohne Beweis):

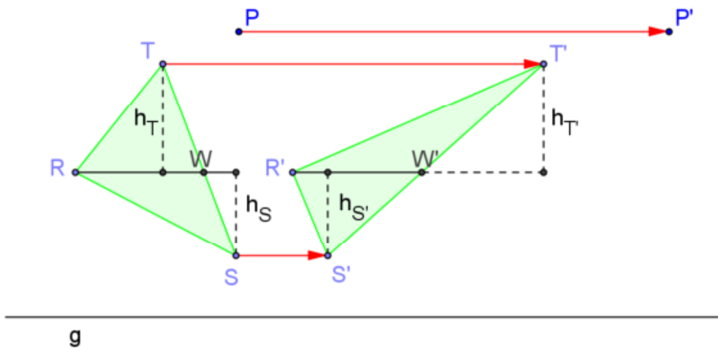
- geradentreu (d.h. das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade) und
- teilverhältnistreu (d.h. das Verhältnis der Länge zweier Strecken auf der gleichen Originalgeraden ist gleich wie das Verhältnis der Längen der Bildstrecken).

Die genannten Eigenschaften ergeben sich mit Hilfe der Strahlensätze aus der Definition der Scherung.

Im Allgemeinen hat die Bildstrecke eine andere Länge als die Originalstrecke. Jedoch sind Strecken, die parallel zur Scherungsgeraden g verlaufen, stets gleich lang wie ihre jeweiligen Bildstrecken.

Für die Lösung unserer Aufgabe verwenden wir zudem die folgende sehr nützliche Eigenschaft von Scherungen:

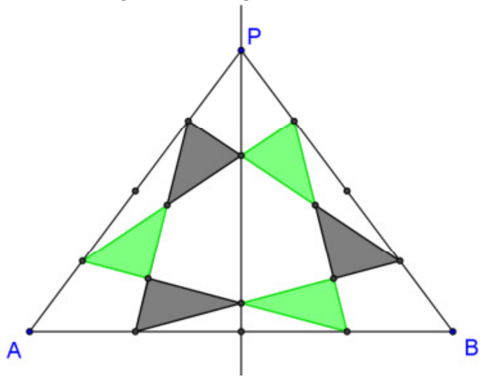
- Jede Scherung ist flächentreu, d.h. Original- und Bildfigur haben den gleichen Flächeninhalt.

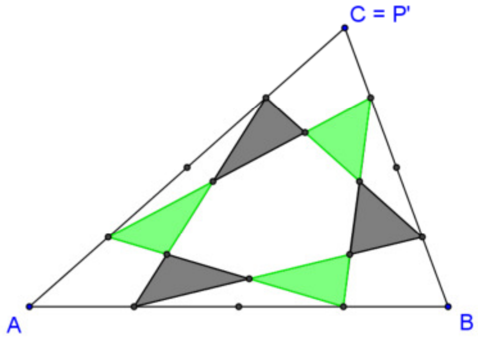


Wir beweisen dies für Dreiecke:
Das Dreieck RST wird durch die Parallele zu g durch R in zwei Teildreiecke mit der gemeinsamen Grundseite RW geteilt.

Bei der Scherung ändert sich die Länge dieser Grundseite nicht, und auch die zu dieser Grundseite gehörigen Höhen der Teildreiecke bleiben gleich lang. Also haben die Teildreiecke und damit auch das gesamte Dreieck nach der Scherung den gleichen Flächeninhalt wie vorher.

Nun zur Lösung von Aufgabe 6:





Aufgrund der Achsensymmetrie des Dreiecks ABP gibt es zu jedem grünen Dreieck darin ein schwarzes Dreieck, das den gleichen Flächeninhalt hat. Da die Scherung flächentreu ist, gilt dies auch im Dreieck ABC. Und daraus folgt sofort die Behauptung der Aufgabe.