Landeswettbewerb Mathematik

Baden-Württemberg

Musterlösungen 2. Runde 2019/2020

Aufgabe 1

Julia addiert mehrere ungerade Quadratzahlen, die nicht notwendigerweise verschieden sind. Sie erhält als Ergebnis wieder eine Quadratzahl, nämlich 19^2. Bestimme alle Möglichkeiten für die Anzahl der Summanden, die Julias Summe haben kann.

Lösung:

Die möglichen Anzahlen der Summanden in Julias Summe sind die Zahlen $9, 17, 25, \dots, 353, 361$. Jede Zahl m der Form $m = 8k + 1$ mit $1 \leq k \leq 45$ ist also eine mögliche Anzahl von Summanden. Andere Anzahlen sind nicht möglich.

1. Beweisvorschlag (mit binomischer Formel):

Es muss gezeigt werden, dass

(A) jede in der Lösung genannte Zahl m eine mögliche Anzahl an Summanden ist und
(B) es für jede mögliche Anzahl m von Summanden eine Zahl k mit $1 \leq k \leq 45$ gibt, so dass $m = 8k + 1$ ist.

Zu (A): Für $k = 45$ ist $m = 8k + 1 = 361$. Dann

$$\underbrace{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2 + 1^2}_{361} = 361$$

Für $k = 44$ ist $m = 8k + 1 = 353$. Man ersetzt in der obigen Summe neun Summanden 1^2 durch einen Summanden 3^2. Dadurch bleibt die Summe gleich, die Anzahl der Summanden sinkt aber um 8, es sind also 353 Summanden:

$$\underbrace{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2 + 1^2}_{352} + 3^2 = 361$$

So fährt man fort: Wenn k um 1 abnimmt, so nimmt $m = 8k + 1$ um 8 ab. Man ersetzt neun Summanden 1^2 durch einen Summanden 3^2. Allgemein erhält man also

$$\underbrace{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2 + 1^2}_{361-9\cdot(45-k)} + \underbrace{3^2 + \dots + 3^2}_{45-k} = 361$$

Dies sind $361 - 9 \cdot (45 - k) + 45 - k = 8k + 1 = m$ Summanden, die alle ungerade Quadratzahlen sind.
Dieses Verfahren ist allerdings nur möglich, wenn noch Summanden 1^2 übrig sind, falls also $361 - 9 \cdot (45 - k) \geq 0$ ist. Das ist äquivalent zu $k \geq \frac{44}{9}$, also nur für $k \geq 5$.
Es fehlen noch die Fälle $k = 1,2,3,4$.
Für $k = 1$ ist $m = 8k + 1 = 9$ und

$$17^2 + \underbrace{3^2 + \cdots + 3^2}_{8} = 361$$

Ersetzt man hier einen Summanden $3^2 = 9$ durch neun Summanden 1^2, so bleibt die Summe gleich, die Anzahl der Summanden erhöht sich um 8. Es ist also für $k = 2,3,4$:

$$17^2 + \underbrace{3^2 + \cdots + 3^2}_{8-(k-1)} + \underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{9 \cdot (k-1)} = 361.$$

Dies sind $1 + 8 - (k - 1) + 9 \cdot (k - 1) = 8k + 1 = m$ Summanden, die alle ungerade Quadratzahlen sind. Da für $k = 1,2,3,4$ die Anzahl $8 - (k - 1)$ der Summanden 3^2 positiv ist, hat man auch in diesen vier Fällen eine Darstellung von 361 mit der behaupteten Anzahl an Summanden gefunden.
Die Behauptung (A) ist also vollständig bewiesen.

Zu (B): Angenommen, die Zahl 361 kann für eine natürliche Zahl m der Aufgabenstellung entsprechend als Summe von m Summanden geschrieben werden, die alle ungerade Quadratzahlen sind. Eine ungerade Quadratzahl n^2 ist Quadrat einer ungeraden Zahl n.
Eine ungerade Zahl n hat die Form $n = 2k - 1$ für eine ganze Zahl k.
Für die m ungeraden Quadratzahlen gibt es also m ganze Zahlen $k_1, \cdots, k_m$ so, dass

$$(2k_1 - 1)^2 + (2k_2 - 1)^2 + \cdots + (2k_m - 1)^2 = 361.$$

Durch Ausmultiplizieren mit der zweiten binomischen Formel erhält man hieraus:

$$4{k_1}^2 - 4k_1 + 1 + 4{k_2}^2 - 4k_2 + 1 + \cdots + 4{k_m}^2 - 4k_m + 1 = 361.$$

Durch Ausklammern und Zusammenfassen der m Summanden 1 ist diese Gleichung äquivalent zu

$$4k_1(k_1 - 1) + 4k_2(k_2 - 1) + \cdots + 4k_m(k_m - 1) = 361 - m$$

Von den beiden aufeinanderfolgenden Zahlen k_1 und $k_1 - 1$ ist genau eine gerade. Das Produkt $k_1(k_1 - 1)$ ist also in jedem Fall gerade. Deswegen ist $4k_1(k_1 - 1)$ durch 8 teilbar.
Analog ist jeder Summand $4k_i(k_i - 1)$ auf der linken Seite der letzten Gleichung durch 8 teilbar. Somit ist die gesamte Summe auf der linken Seite durch 8 teilbar. Daraus folgt, dass die rechte Seite ebenfalls durch 8 teilbar sein muss. Es ist also $361 - m$ durch 8 teilbar. Somit gibt es eine ganze Zahl a, so dass $361 - m = 8a$.
Daraus folgt $m = 361 - 8a = 8 \cdot 45 + 1 - 8a = 8 \cdot (45 - a) + 1 = 8k + 1$ mit $k = 45 - a$.
Da nach Aufgabenstellung $1 < m \leq 361$ (es gibt „mehrere“ Summanden), folgt $1 \leq k \leq 45$. Demnach ist m von der in (B) behaupteten Form.

Bemerkung:
In (A) gibt es ohne Beachtung der Reihenfolge der Summanden 2689 verschiedene Summendarstellungen.

2. Beweisvorschlag (mit Modulorechnung):

Wie im 1. Beweisvorschlag müssen zwei Teilaussagen (A) und (B) bewiesen werden. Teil (A) wird wie im ersten Beweisvorschlag bewiesen.

Zu (B): Es wird zunächst folgende bekannte Vorbemerkung bewiesen:

Vorbemerkung:
Jede ungerade Quadratzahl q lässt beim Teilen durch 8 den Rest 1.
Das schreibt man in Moduloschreibweise so: $q \equiv 1 \, mod \, 8$.

Beweis der Vorbemerkung: Wenn q eine ungerade Quadratzahl ist, so gibt es eine ungerade Zahl u mit $q = u^2$. Zu u gibt es eine ganze Zahl z mit $u = 2z + 1$.
Somit $q = u^2 = (2z + 1)^2 = 4z^2 + 4z + 1 = 4z(z + 1) + 1$.
Von den beiden aufeinanderfolgenden Zahlen z und $z + 1$ ist eine gerade. Somit ist auch das Produkt $z(z + 1)$ gerade. Also ist $4z(z + 1)$ durch 8 teilbar. Somit läßt q bei der Division durch 8 den Rest 1. In Moduloschreibweise:

$$q = u^2 = 4z(z + 1) + 1 \equiv 0 + 1 \, mod \, 8 \equiv 1 \, mod \, 8.$$

Nun zum Beweis von (B). Sei 361 als Summe von m ungeraden Quadratzahlen dargestellt, d.h.

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2 = 361.$$

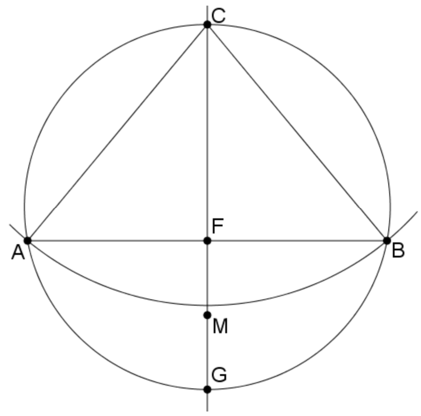
Für das Rechnen mit Resten gilt: Wenn die Zahl k bei Division durch 8 den gleichen Rest lässt wie die Zahl a (in Moduloschreibweise: $k \equiv a \, mod \, 8$) und die Zahl n den gleichen Rest wie die Zahl b ($n \equiv b \, mod \, 8$), dann lässt auch $k + n$ den gleichen Rest wie $a + b$ ($k + n \equiv a + b \, mod \, 8$).
Somit ergibt sich nach der Vorbemerkung:

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2 \equiv \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m} \, mod \, 8 \equiv m \, mod \, 8.$$

Aus $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2 = 361$ folgt nun $m \equiv 361 \, mod \, 8 \equiv 1 \, mod \, 8$, denn 361 lässt bei Division durch 8 den Rest 1.
Somit lässt auch m bei Division durch 8 den Rest 1. Also $m = 8k + 1$ für eine ganze Zahl k. Da $1 < m \leq 361$ ist $1 \leq k \leq 45$. Somit ist (B) bewiesen.

Aufgabe 2

Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit Basis $\overline{AB}$. Der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ wird mit F bezeichnet. Die Gerade CF schneidet den Umkreis des Dreiecks ABC außer im Punkt C noch im Punkt G. Liegt der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{FG}$ stets außerhalb des Kreises um C durch A?



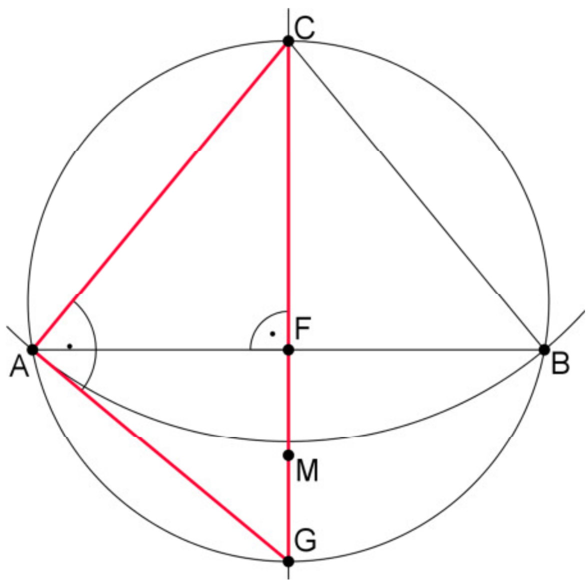
Lösung:

Ja, der Punkt M liegt in jedem Fall außerhalb des Kreises um C durch A.

1. Beweisvorschlag (mit Satz des Pythagoras):

Da die Punkte G und C auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ liegen ist $\overline{CG}$ ein Durchmesser des Umkreises von Dreieck ABC.
Somit liegt A auf dem Thaleskreis über $\overline{CG}$. Das Dreieck AGC ist nach dem Satz des Thales rechtwinklig mit rechtem Winkel bei A.

Die Sehne $\overline{AB}$ steht senkrecht auf dem Durchmesser $\overline{CG}$. Daher ist $\overline{AF}$ die Höhe im rechtwinkligen Dreieck AGC zur Hypotenuse $\overline{CG}$.



Somit hat man drei rechtwinklige Dreiecke: AGC, AGF und AFC.
Der Satz des Pythagoras ergibt für diese drei Dreiecke:

$$\overline{CG}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AG}^2 \quad (1)$$

$$\overline{AG}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FG}^2 \quad (2)$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FC}^2 \quad (3)$$

Gleichung (3) ist äquivalent zu $\overline{AF}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{FC}^2$. Setzt man dies in Gleichung (2) ein, so ergibt sich

$$\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{FC}^2 + \overline{FG}^2$$

Setzt man dies in (1) ein, so folgt

$$\overline{CG}^2 = 2 \cdot \overline{AC}^2 - \overline{FC}^2 + \overline{FG}^2 \quad (4)$$

Nun ist $\overline{CG} = \overline{FC} + \overline{FG} = \overline{FC} + 2 \cdot \overline{FM}$, also

$$\overline{CG}^2 = (\overline{FC} + 2 \cdot \overline{FM})^2 = \overline{FC}^2 + 4 \cdot \overline{FC} \cdot \overline{FM} + 4 \cdot \overline{FM}^2 \quad (5)$$

Andererseits ist $\overline{\mathrm{FG}} = 2 \cdot \overline{\mathrm{FM}}$, also $\overline{\mathrm{FG}}^2 = 4 \cdot \overline{\mathrm{FM}}^2$. Setzt man dies und Gleichung (5) in (4) ein, so ergibt sich

$$\overline{FC}^2 + 4 \cdot \overline{FC} \cdot \overline{FM} + 4 \cdot \overline{FM}^2 = 2 \cdot \overline{AC}^2 - \overline{FC}^2 + 4 \cdot \overline{\mathrm{FM}}^2$$

bzw. $\overline{AC}^2 = \overline{FC}^2 + 2 \cdot \overline{FC} \cdot \overline{FM}$. Da $\overline{FM}^2 > 0$ folgt

$$\overline{AC}^2 = \overline{FC}^2 + 2 \cdot \overline{FC} \cdot \overline{FM} < \overline{FC}^2 + 2 \cdot \overline{FC} \cdot \overline{FM} + \overline{FM}^2 = (\overline{FC} + \overline{FM})^2 = \overline{MC}^2.$$

Somit ist $\overline{AC} < \overline{MC}$.

Daher ist die Entfernung von M zum Mittelpunkt C des betrachteten Kreises größer als sein Radius $\overline{AC}$. Also liegt M immer außerhalb dieses Kreises.

2. Beweisvorschlag (mit Kathetensatz):

Vorbemerkung:

Für zwei verschiedene positive Zahlen a und b ist das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ von a und b kleiner als das arithmetische Mittel $\frac{a+b}{2}$ von a und b: $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$.

Beweis der Vorbemerkung:

Da $a \neq b$ ist $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 > 0$. Somit

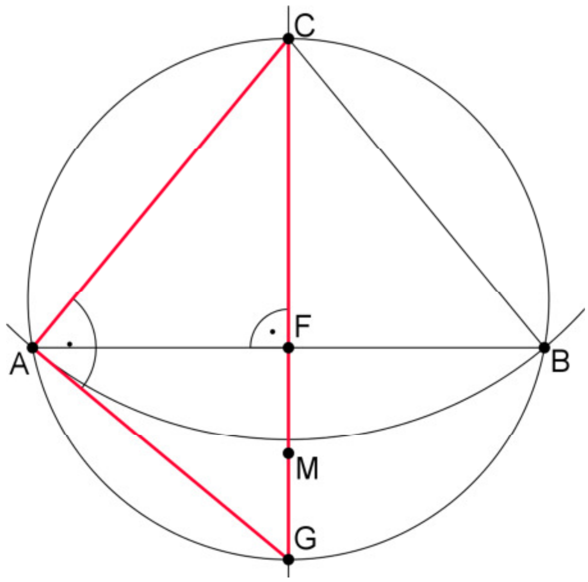
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{4ab}{4} = ab$$

Da $ab > 0$ folgt $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

Nun zum Beweis der Aufgabe.

Da die Punkte G und C auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ liegen ist $\overline{CG}$ ein Durchmesser des Umkreises von Dreieck ABC.

Somit liegt A auf dem Thaleskreis über $\overline{CG}$. Das Dreieck AGC ist nach dem Satz des Thales rechtwinklig mit rechtem Winkel bei A.



Die Sehne $\overline{AB}$ steht senkrecht auf dem Durchmesser $\overline{CG}$. Daher ist $\overline{AF}$ die Höhe im rechtwinkligen Dreieck AGC zur Hypotenuse $\overline{CG}$.

Nach dem Kathetensatz gilt in diesem Dreieck demnach

$$\overline{CA}^2 = \overline{CF} \cdot \overline{CG}.$$

Nach der Vorbemerkung folgt

$$\overline{CA} = \sqrt{\overline{CF} \cdot \overline{CG}} < \frac{\overline{CF} + \overline{CG}}{2}.$$

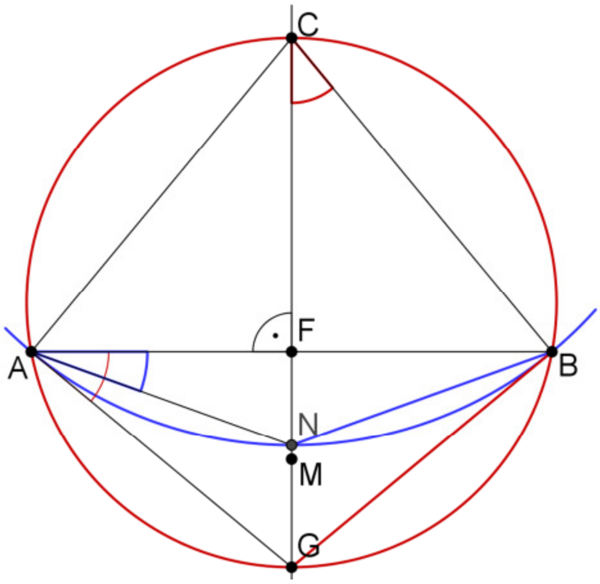
Da M die Mitte zwischen F und G ist folgt

$$\frac{\overline{CF}+\overline{CG}}{2}=\frac{\overline{CF}+\overline{CF}+\overline{FG}}{2}=\overline{CF}+\frac{\overline{FG}}{2}=\overline{CM}.$$

Somit ist $\overline{CA}<\overline{CM}$.
Daher ist die Entfernung von M zum Mittelpunkt C des betrachteten Kreises größer als sein Radius $\overline{CA}$. Deswegen liegt M immer außerhalb dieses Kreises.

3. Beweisvorschlag (mit Satz über die Winkelhalbierende im Dreieck):

Sei N der Schnittpunkt des Kreises um C durch A und B mit der Strecke $\overline{CG}$. Da $\overline{CA}<\overline{CG}$ gibt es immer einen solchen Schnittpunkt.



Behauptung:
Die Gerade AN ist im Dreieck AGF die Winkelhalbierende des Innenwinkels $\sphericalangle GAF$ bei A.

Wir beweisen diese Behauptung in zwei Beweisvarianten:

Beweisvariante 1: Nach Umfangswinkelsatz gilt über der Sehne $\overline{GB}$ im Umkreis von Dreieck ABC:

$$\sphericalangle GAB=\sphericalangle GCB=\sphericalangle NCB.$$

Im Kreis um C durch A und B ist der Umfangswinkel $\sphericalangle NAB$ zur Sehne $\overline{NB}$ halb so weit wie der zugehörige Mittelpunktswinkel $\sphericalangle NCB$. Also $\sphericalangle NCB=2\cdot\sphericalangle NAB=2\cdot\sphericalangle NAF$.
Somit gilt $\sphericalangle GAF=2\cdot\sphericalangle NAF$, folglich ist AN die Winkelhalbierende von $\sphericalangle GAF$.

Beweisvariante 2: Das Dreieck AGC ist nach Satz des Thales rechtwinklig und wird von der Höhe $\overline{AF}$ (siehe 1. Beweisvorschlag) in zwei Dreiecke GFA und AFC geteilt. Diese beiden rechtwinkligen Dreiecke sind beide ähnlich zum rechtwinkligen Dreieck AGC, denn beide haben mit AGC außer dem rechten Winkel einen weiteren Winkel gemeinsam, nämlich Dreieck GFA den Winkel $\sphericalangle FGA$ und Dreieck AFC den Winkel $\sphericalangle ACF$.

Da die Dreiecke GFA und AFC ähnlich zueinander sind, gilt $\sphericalangle GAF=\sphericalangle ACF$.
Das Dreieck ANC ist gleichschenklig. Somit gilt

$$\sphericalangle ACF=180°-2\cdot\sphericalangle NAC.$$

Es gilt

$$\sphericalangle NAC=\sphericalangle NAF+\sphericalangle FAC=\sphericalangle NAF+(90°-\sphericalangle ACF)=\sphericalangle NAF+90°-\sphericalangle GAF.$$

Damit ergibt sich

$$\sphericalangle GAF=180°-2\cdot\sphericalangle NAC=180°-2\cdot(\sphericalangle NAF+90°-\sphericalangle GAF)=2\cdot\sphericalangle GAF-2\cdot\sphericalangle NAF.$$

Die Gleichung $\sphericalangle GAF = 2 \cdot \sphericalangle GAF - 2 \cdot \sphericalangle NAF$ ist äquivalent zu $\sphericalangle GAF = 2 \cdot \sphericalangle NAF$.
Das ist die Behauptung.

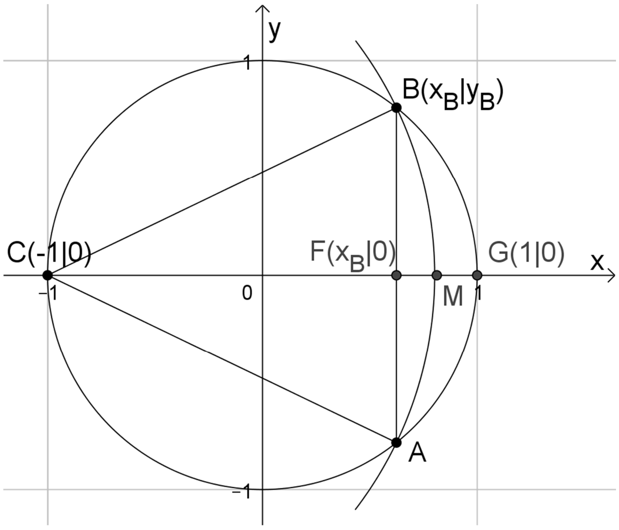
Nach dem Satz über die Winkelhalbierende teilt jede Winkelhalbierende in einem Dreieck die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten. Somit

$$\frac{\overline{NF}}{\overline{NG}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AG}}.$$

Im Dreieck AGF ist $\overline{AG}$ die Hypotenuse, $\overline{AF}$ eine Kathete, also $\overline{AF} < \overline{AG}$. Somit gilt auch $\overline{NF} < \overline{NG}$. Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{FG}$ liegt also im Inneren der Strecke $\overline{GN}$ und damit außerhalb des Kreises um C durch A. Das war zu zeigen.

4. Beweisvorschlag (mit Koordinatenrechnung):

Wie in der Abbildung dargestellt, wird ein Koordinatensystem eingeführt, so dass der Mittelpunkt des Umkreises im Ursprung liegt. Die Punkte C und G liegen auf dem Einheitskreis auf der x-Achse.
Der Punkt C hat also die Koordinaten $C(-1|0)$, G die Koordinaten $G(+1|0)$.
Der Punkt B hat die Koordinaten $B(x_B|y_B)$ mit $-1 < x_B < 1$ und $0 < y_B \leq 1$.
Die x-Achse ist Symmetrieachse des gleichschenkligen Dreiecks, also hat F die Koordinaten $F(x_B|0)$.



Da M der Mittelpunkt von F und G ist, hat M die Koordinaten $M\left(\frac{x_B+1}{2}|0\right)$.

Somit $\overline{CM} = 1 + \frac{x_B+1}{2} = \frac{1}{2}x_B + \frac{3}{2}$, also $\overline{CM}^2 = \left(\frac{1}{2}x_B + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}x_B^2 + \frac{3}{2}x_B + \frac{9}{4}$.
Andererseits ist $\overline{CB}^2 = (1 + x_B)^2 + y_B^2 = 1 + 2x_B + (x_B^2 + y_B^2) = 2 + 2x_B$.
Hier wurde benutzt, dass B auf dem Einheitskreis liegt, also $x_B^2 + y_B^2 = 1$ gilt.
Da $\overline{CM}$ und $\overline{CB}$ positiv sind, ist $\overline{CM} > \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CM}^2 > \overline{CB}^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x_B^2 + \frac{3}{2}x_B + \frac{9}{4} > 2 + 2x_B$.

Dies ist äquivalent zu $\frac{1}{4}x_B^2 - \frac{1}{2}x_B + \frac{1}{4} > 0$ bzw. $\left(\frac{1}{2}x_B - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$.
Da $x_B \neq 1$ ist, ist diese Ungleichung erfüllt.
Somit gilt $\overline{CM} > \overline{CB}$ und M liegt außerhalb des Kreises.

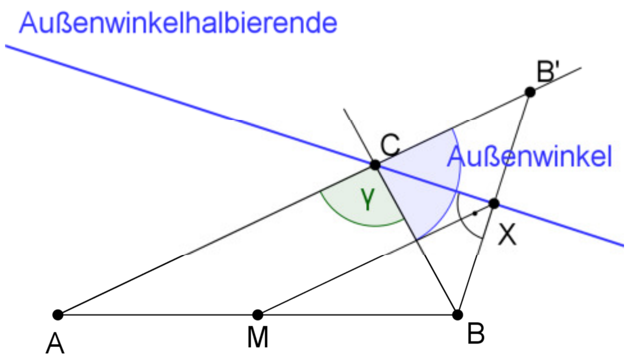
Bemerkung:
Im vierten Beweisvorschlag kann die Lage von B auf dem Einheitskreis auch mit Hilfe des Mittelpunktswinkels $\alpha = \sphericalangle GOB$ beschrieben werden. Dann hat B die Koordinaten $B(\cos(\alpha)|\sin(\alpha))$. Man rechnet dann in der obigen Rechnung mit $\cos(\alpha)$ statt x_B.

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Mit X bezeichnen wir den Fußpunkt des Lotes von B auf die Außenwinkelhalbierende bei C. Nun wird der Punkt C so bewegt, dass der Umfang des Dreiecks ABC konstant bleibt. Beweise, dass sich der Punkt X dabei auf einem Kreis bewegt.

1. Beweisvorschlag (mit Mittelparallele):

Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und sei B' der Bildpunkt von B bei Spiegelung an der betrachteten Außenwinkelhalbierenden.



Da die beiden Schenkel des Winkels symmetrisch zur Winkelhalbierenden liegen und da B auf dem ersten Schenkel liegt, liegt B' auf dem zweiten Schenkel, also auf der Geraden durch A und C.

Die Außenwinkelhalbierende ist Mittelenkrechte der Strecke $\overline{BB'}$. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BB'}$ ist also der Lotfußpunkt X von B auf die Außenwinkelhalbierende.

Der Punkt C wird nun so bewegt, dass der Umfang u des Dreiecks ABC konstant ist.
Da sich $c = \overline{AB}$ nicht ändert, hat $\overline{AC} + \overline{CB}$ den konstanten Wert $s = u - c$.
Aufgrund der Eigenschaften der Achsenspiegelung ist $\overline{CB} = \overline{CB'}$. Damit gilt also
$\overline{AB'} = \overline{AC} + \overline{CB'} = \overline{AC} + \overline{CB} = s$.
Das bedeutet aber für die Länge der Mittelparallelen $\overline{MX}$ im Dreieck ABB':

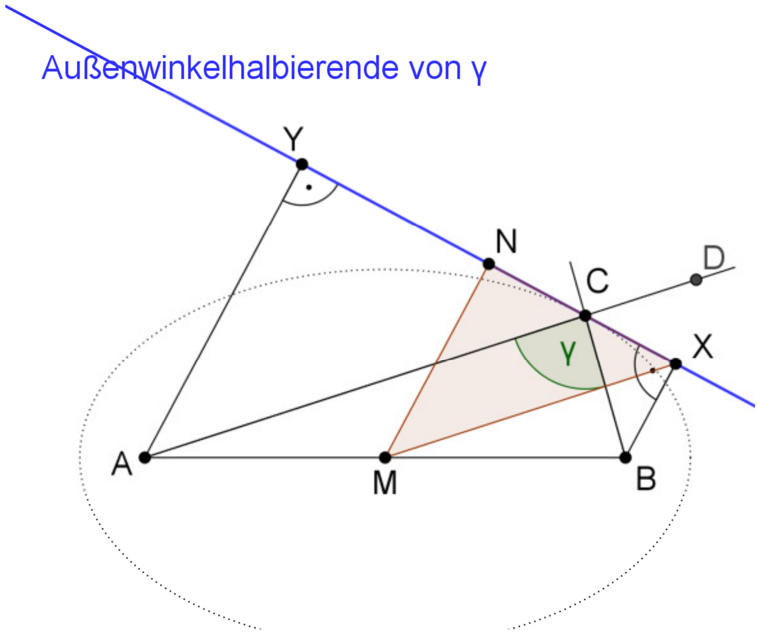
$$\overline{MX} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB'} = \frac{1}{2} \cdot s.$$

Unabhängig von der Lage von C hat also X die Entfernung

$$\overline{MX} = \frac{1}{2} \cdot s = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}c$$

vom M. Der Punkt X bewegt sich also auf dem Kreis um M mit Radius $\frac{1}{2}s$.

2. Beweisvorschlag (mit ähnlichen Dreiecken):



Sei Y der Lotfußpunkt von A auf die Außenwinkelhalbierende des Winkels γ. Seien M und N die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AB}$ bzw. $\overline{XY}$. Der Punkt C wird nun so bewegt, dass der Umfang des Dreiecks ABC konstant ist. Weil sich dabei $c = \overline{AB}$ nicht ändert, hat auch $\overline{AC}\ +\ \overline{BC}$ einen konstanten Wert s.
Da die Gerade XY die Außenwinkelhalbierende von γ ist, gilt

$$\sphericalangle BCX = \sphericalangle XCD = \sphericalangle ACN.$$

Hierbei ist D ein Punkt auf der Verlängerung von $\overline{AC}$.

Wegen der rechten Winkel bei X und Y sind daher die beiden Dreiecke BXC und ACY ähnlich.
Es gibt daher eine positive reelle Zahl k so, dass

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{YC}}{\overline{XC}} = k.$$

Hieraus ergibt sich $s = \overline{AC}\ +\ \overline{BC} = k \cdot \overline{BC} + \overline{BC} = (1+k) \cdot \overline{BC}$ bzw. $\overline{BC} = \frac{s}{1+k}$.
Für die Strecke $\overline{NX}$ ergibt sich

$$\overline{NX} = \frac{1}{2} \cdot \overline{YX} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{YC} + \overline{XC}) = \frac{1}{2} \cdot (k \cdot \overline{XC} + \overline{XC}) = \frac{k+1}{2} \cdot \overline{XC}. \quad (1)$$

Da $\overline{AX}$ und $\overline{BX}$ senkrecht auf $\overline{YX}$ stehen, sind $\overline{AY}$ und $\overline{BX}$ parallel. Daher ist das Viereck $ABXY$ ein Trapez. Die Mittelparallele im Trapez hat die Länge

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{BX} + \overline{AY}) = \frac{1}{2} \cdot (\overline{BX} + k \cdot \overline{BX}) = \frac{k+1}{2} \cdot \overline{BX}. \quad (2)$$

Das Dreieck MXN ist rechtwinklig mit rechtem Winkel bei N, da $\overline{MN}$ parallel zu $\overline{AY}$ ist.
Das Dreieck MXN ist also wegen den Gleichungen (1) und (2) ähnlich zum rechtwinkligen Dreieck BXC mit Ähnlichkeitsfaktor $\frac{k+1}{2}$.
Somit $\overline{MX} = \frac{k+1}{2} \cdot \overline{BC} = \frac{k+1}{2} \cdot \frac{s}{k+1} = \frac{s}{2}$.
Der Punkt X hat also eine von der Lage von C unabhängigen, konstante Entfernung vom Punkt M. Er bewegt sich also auf einem Kreis um M mit Radius $\frac{s}{2}$. Das war zu zeigen.

Bemerkungen:
Der Punkt X durchläuft nicht alle Punkte des beschriebenen Kreises um M. Die beiden Endpunkte desjenigen Kreisdurchmessers, auf dem A und B liegen, werden nicht erreicht.
Die Menge der Punkte C, für die die Summe der Abstände zu den Punkten A und B den konstanten Wert s hat, ist eine Ellipse, bei der A und B die Brennpunkte sind. Diese Ellipse ist in obiger Abbildung gepunktet eingezeichnet.

Aufgabe 4

Wolfgang übt Korbleger und berechnet nach jedem Versuch seine Gesamttrefferquote. Er beginnt mit einem Fehlversuch. Nach weiteren n Versuchen, die nicht alle Treffer sein müssen, hat er erstmals eine Gesamttrefferquote erreicht, die größer oder gleich 75% ist. Dann folgt ein Fehlversuch. Nach weiteren k Versuchen, die alle Treffer sind, ist die Gesamttrefferquote erstmals größer oder gleich 80%. Bestimme alle Paare $(n;\ k)$, für die diese Situation eintreten kann.

Lösung:

Die beschriebene Situation tritt genau dann für ein Paar $(n; k)$ von natürlichen Zahlen n und k ein, wenn $k \geq 5$ und $n = 4k - 17$ ist. Die ersten derartigen Paare sind also
$(3;\ 5), (7;\ 6), (11;\ 7), \ldots$

Beweisvorschlag:

Es muss gezeigt werden, dass

(A) wenn die beschriebene Situation für ein Paar $(n; k)$ eintritt, dann $k \geq 5$ und $n = 4k - 17$ gilt und
(B) für alle Paare $(n; k)$ von natürlichen Zahlen mit $k \geq 5$ und $n = 4k - 17$ die Situation wie beschrieben eintreten kann.

Zu (A): Angenommen, die beschriebene Situation tritt für das Paar $(n; k)$ von natürlichen Zahlen ein.
Nach Wolfgangs Fehlversuch gleich zu Beginn gibt es unter den folgenden n Versuchen genau t Treffer. Dann gilt für die Trefferquote nach insgesamt $n + 1$ Versuchen:

$$\frac{t}{n+1} \geq 75\% = \frac{3}{4}.$$

Dies ist äquivalent zu $4t \geq 3n + 3$.
Wäre der insgesamt $(n + 1)$ –te Versuch kein Treffer gewesen, dann wäre die Trefferquote vor diesem Versuch bereits

$$\frac{t}{n} > \frac{t}{n+1} \geq \frac{3}{4} = 75\%$$

gewesen. Das widerspricht der beschriebenen Situation, denn nach insgesamt $n + 1$ Versuchen hat Wolfgang *erstmals* eine Trefferquote die größer oder gleich 75% ist.
Also ist der $(n + 1)$ –te Versuch ein Treffer und die Trefferquote vor diesem Versuch ist

$$\frac{t-1}{n} < 75\% = \frac{3}{4}.$$

Das ist äquivalent zu $4t < 3n + 4$.
Da $4t$ eine ganze Zahl ist, folgt aus $4t \geq 3n + 3$ und $4t < 3n + 4$ nun $4t = 3n + 3$.

Weiter ist nach Aufgabenstellung der $(n + 2)$-te Versuch ein Fehlversuch, worauf dann k Treffer folgen. Da dann erstmals eine Trefferquote von mindestens 80% erreicht sein soll, gelten die beiden Ungleichungen

$$\frac{t+k}{n+2+k} \geq 80\% = \frac{4}{5}$$

und
$$\frac{t+k-1}{n+1+k} < 80\% = \frac{4}{5}$$
Die erste Ungleichung ist äquivalent zu $5t + 5k \geq 4n + 8 + 4k$ bzw. $5t + k \geq 4n + 8$.
Die zweite Ungleichung ist äquivalent zu $5t + k < 4n + 9$.
Da $5t + k$ eine natürliche Zahl ist, ergibt sich aus beiden Ungleichungen
$$5t + k = 4n + 8.$$

Insgesamt wurden also die beiden Gleichungen $4t = 3n + 3$ und
$5t + k = 4n + 8$ abgeleitet.
Nun $4t = 3n + 3 \Leftrightarrow 20t = 15n + 15$ und $5t + k = 4n + 8 \Leftrightarrow 20t + 4k = 16n + 32$.
Setzt man $20t = 15n + 15$ in $20t + 4k = 16n + 32$ ein, so folgt $15n + 15 + 4k = 16n + 32$ bzw.
$$n = 4k - 17.$$
Damit n nicht negativ ist, muss $k \geq 5$ gelten. Somit wurde (A) bewiesen.

Zu (B): Sei $(n; k)$ ein Paar von natürlichen Zahlen n und k mit $k \geq 5$ und $n = 4k - 17$.
Dann kann die folgender Abfolge von Treffern (T) und Nichttreffern (N) auftreten:

$$N, \underbrace{N, \dots, N}_{k-5}, \underbrace{T, \dots, T}_{3k-12}, N, \underbrace{T, \dots, T}_{k}.$$

Bis zum $(k-4)$-ten Versuch ist die Trefferquote 0. Danach wird die Trefferquote mit jedem der $3k - 12$ folgenden Treffer echt größer. Es ist logisch, dass die Trefferquote mit einem Treffer steigt. Dies lässt sich auch beweisen:

Behauptung: *Angenommen die Trefferquote ist noch nicht 100%. Dann wird sie bei einem weiteren Treffer größer.*
Beweis: Angenommen es wurden bei v Versuchen t Treffer erzielt. Nach Annahme ist $t < v$, da für $t = v$ die Trefferquote $\frac{t}{v} = 1 = 100\%$ wäre. Bei einem weiteren Treffer im nächsten Versuch ist die Trefferquote $\frac{t+1}{v+1}$. Nun
$$\frac{t}{v} < \frac{t+1}{v+1} \Leftrightarrow t \cdot (v+1) < v \cdot (t+1) \Leftrightarrow tv + t < tv + v \Leftrightarrow t < v$$
Aus $t < v$ folgt also $\frac{t}{v} < \frac{t+1}{v+1}$. Das ist die Behauptung.

Nach den $3k - 12$ Treffern, die den ersten $1 + k - 5$ Nichttreffern folgen, ist die Gesamttrefferquote auf $\frac{3k-12}{1+k-5+3k-12} = \frac{3k-12}{4k-16} = \frac{3\cdot(k-4)}{4\cdot(k-4)} = \frac{3}{4} = 75\%$ gestiegen. Sie erreicht diesen Wert erstmals, da die Trefferquote nach der Behauptung stets ansteigt. Nach dem ersten Nichttreffer wurden dafür $k - 5 + 3k - 12 = 4k - 17 = n$ Versuche absolviert.
Somit ist der erste Teil der in der Aufgabenstellung beschriebenen Situation erfüllt.
Nach dem Nichttreffer im $(n+2)$-ten Versuch sinkt die Trefferquote unter 75% um danach mit jedem der letzten k Treffer wieder echt anzusteigen. Das folgt wieder aus der obigen Behauptung. Nach dem letzten Versuch erreicht die Gesamttrefferquote wie gefordert erstmals den Wert $\frac{3k-12+k}{1+k-5+3k-12+1+k} = \frac{4k-12}{5k-15} = \frac{4\cdot(k-3)}{5\cdot(k-3)} = \frac{4}{5} = 80\%$.