Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg
Musterlösungen 2. Runde 2018/2019

Aufgabe 1

Zwölf Schüler einer Klasse haben ein Schere-Stein-Papier-Turnier ausgetragen. Dabei trat jeder gegen jeden genau einmal an. Für einen Sieg gab es zwei Punkte, für ein Unentschieden einen Punkt, für eine Niederlage keinen Punkt.
Am Ende des Turniers haben alle Teilnehmer verschiedene Punktzahlen erzielt. Der Spieler auf dem zweiten Platz hat genau so viele Punkte wie die letzten fünf zusammen. Wie endete die Partie zwischen den Spielern, die den 7. und den 9. Platz belegen?

Lösung:

Der Spieler, der den siebten Platz belegt, hat gegen den Spieler auf dem neunten Platz gewonnen.

Beweisvorschlag:

Die 5 letztplatzierten Spieler belegen die Plätze 8 bis 12. Sie tragen untereinander insgesamt 10 Spiele aus: Der Spieler auf Platz 8 spielt gegen jeden der vier anderen dieser fünf Spieler, das sind vier Spiele. Für den Spieler auf Platz 9 haben wir das Duell gegen den Achtplatzierten schon gezählt, es kommen also nur noch seine drei Duelle gegen die Spieler auf Platz 10 bis 12 hinzu. Das sind drei weitere Spiele. Der Spieler auf Platz 10 spielt außer seinen beiden Duellen gegen die Spieler auf Platz 8 und 9 noch gegen die Spieler auf Platz 11 und 12, das sind zwei weitere Spiele. Schließlich wurde nur noch ein Duell nicht gezählt, nämlich das Spiel vom Spieler auf Platz 11 gegen den Spieler auf Platz 12.
Insgesamt sind es also $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ Spiele unter den fünf letztplatzierten Spielern.

In diesen 10 Spielen gegeneinander haben die fünf letztplatzierten Spieler zusammen genau 20 Punkte erzielt, denn es gibt pro Duell nach Aufgabenstellung immer genau 2 Punkte. Die letzten fünf Spieler haben also zusammen genau 20 Punkte aus den Spielen gegeneinander erzielt. Insgesamt könnten sie zusammen auch mehr Punkte erzielt haben, wenn einer dieser Spieler Punkte gegen einen der sieben besser platzierten Spieler errungen hat.

In jedem Fall muss nach Aufgabenstellung auch der Zweitplatzierte mindestens 20 Punkte erzielt haben, denn er hat gleich viele Punkte, wie die letzten fünf zusammen. Dieser Zweitplatzierte hat auch gegen jeden anderen der zwölf Spieler gespielt, er hat also elf Spiele ausgeführt. In diesen elf Spielen kann er höchstens 22 Punkte erzielt haben.

- Hätte der Zweitplatzierte 22 Punkte erzielt, so hätte er alle Spiele gewonnen, insbesondere auch gegen den Spieler auf dem ersten Platz. Somit müsste der Erstplatzierte ein Spiel verloren haben, er könnte aus seinen elf Spielen höchstens 20 Punkte erzielt haben. Somit wäre er aber hinter dem Zweitplatzierten, was nicht sein kann. Der Zweitplatzierte kann nicht 22 Punkte erzielt haben.
- Hätte der Zweitplatzierte 21 Punkte erzielt, so müsste er 10 Spiele gewonnen haben, eines hätte er unentschieden gespielt. Insbesondere hätte der Erstplatzierte auch nicht alle seine 11 Spiele gewonnen, denn zumindest gegen den Zweitplatzierten hätte er nicht gewonnen, da dieser ja gar kein Spiel verloren hat. Der Erstplatzierte hätte höchstens 21 Punkte erzielt. Nach Aufgabenstellung kann der Erstplatzierte aber nicht 21 Punkte haben, da er dann gleich viele Punkte wie der Zweitplatzierte erzielt hätte und alle Spieler unterschiedliche Punktzahlen erzielt haben. Somit hätte der Erstplatzierte weniger als 21 Punkte erzielt und wäre hinter dem Zweitplatzierten – was natürlich nicht sein kann. Der Zweitplatzierte kann nicht 21 Punkte erzielt haben.

Somit hat der Zweitplatzierte genau 20 Punkte erzielt. Die fünf Letztplatzierten hätten folglich nach Aufgabenstellung ebenfalls zusammen genau 20 Punkte erzielt. Außer in den 10 Spielen gegeneinander, in denen sie ja die 20 Punkte schon erreicht haben, haben sie keine weiteren Punkte erzielt. Insbesondere haben die fünf Spieler auf Platzt 8 bis 12 alle Spiele gegen die sieben Spieler auf den Plätzen 1 bis 7 verloren.

Insbesondere hat also der Spieler auf Platz 7 gegen den Spieler auf Platz 9 gewonnen.

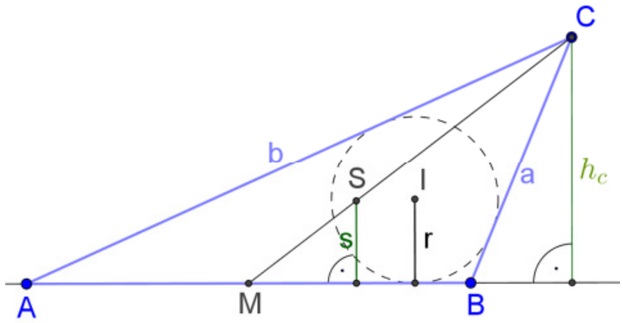
.

Aufgabe 2

Gegeben ist ein Dreieck ABC, bei dem der Inkreismittelpunkt I und der Schwerpunkt S nicht zusammenfallen.
Zeige: $a + b = 2c \Leftrightarrow SI \parallel AB$

Beweisvorschlag:

Sei s der Abstand des Schwerpunkts S von der Seite $\overline{AB}$ und r der Abstand des Inkreismittelpunkts I von der Seite $\overline{AB}$.
Wenn SI und AB parallel sind, so sind die Abstände der Punkte S und I zur Seite $\overline{AB}$ gleich groß, d.h. $r = s$. Falls umgekehrt $r = s$ so ist SI parallel zu AB.
Es gilt also $SI \parallel AB \Leftrightarrow r = s$.



Zu zeigen ist also $a + b = 2c \Leftrightarrow r = s$.

Sei M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$.
Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, insbesondere liegt der Schwerpunkt auf der Seitenhalbierenden $\overline{CM}$. Dabei teilt der Schwerpunkt jede Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1. Insbesondere gilt $\frac{\overline{CS}}{\overline{SM}} = 2$.
Daraus folgt $\frac{\overline{CM}}{\overline{SM}} = \frac{\overline{CS}+\overline{SM}}{\overline{SM}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{SM}} + 1 = 2 + 1 = 3$.

Sei h_c die Höhe zur Seite $\overline{AB}$ im Dreieck ABC. Da auch h_c senkrecht auf $\overline{AB}$ steht, ist h_c parallel zu s. Wir können also den zweiten Strahlensatz auf diese Strahlensatzfigur mit Zentrum M anwenden.
Nach diesem Strahlensatz gilt $\frac{h_c}{s} = \frac{\overline{CM}}{\overline{SM}} = 3$. Somit $h_c = 3s$.
Der Abstand des Inkreismittelpunkts zu einer Dreiecksseite ist der Inkreisradius. Es ist also r der Inkreisradius.
Wir verwenden nun zwei bekannte Formeln für den Flächeninhalt $A_{\Delta ABC}$ eines Dreiecks ABC:
(1) Es gilt $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot U \cdot r$, wobei U der Umfang und r der Inkreisradius des Dreiecks ist.

(2) Es gilt $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$.
Aus (1) und (2) folgt $\frac{1}{2} \cdot (a + b + c) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$. Aus $h_c = 3s$ ergibt sich somit

$$(a + b + c) \cdot r = c \cdot (3s). \quad (*)$$

Falls nun $a + b = 2c$, so ergibt sich auf der linken Seite von Gleichung (*) $3cr$.
Somit folgt aus (*) $3cr = 3cs$. Da $c > 0$ kann man durch c dividieren und erhält $r = s$.

Falls umgekehrt $r = s$ so ergibt sich auf der linken Seite von (*) $(a + b) \cdot s + cs$. Durch Subtraktion von cs auf beiden Seiten von (*) folgt $(a + b) \cdot s = 2cs$. Der Schwerpunkt liegt immer im Inneren eines Dreiecks, er kann also nicht auf einer Dreiecksseite liegen. Daher gilt $s > 0$. Man kann also durch s dividieren und erhält $a + b = 2c$.

Es ist also $a + b = 2c \Leftrightarrow r = s$. Dies war zu zeigen.

Aufgabe 3

Zeige: Unter acht aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es immer mindestens eine, die teilerfremd zu jeder der anderen sieben Zahlen ist.

1. Beweisvorschlag:

Vorbemerkungen:
(1) Unter drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen ist genau eine durch 3 teilbar: Eine ungerade Zahl ist nämlich Nachfolger einer geraden Zahl, sie hat also die Form $2n + 1$ (n natürliche Zahl). Drei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen sind also von der Form $2n + 1, 2n + 3, 2n + 5$.

- Ist $2n + 1$ durch 3 teilbar, so lässt $2n + 3$ bei Division durch 3 den Rest 2 und $2n + 5 = (2n + 1) + 3 + 1$ den Rest 1. Es ist also nur $2n + 1$ durch 3 teilbar.
- Lässt $2n + 1$ bei Division durch 3 den Rest 1, so ist $2n + 3 = (2n + 1) + 2$ durch 3 teilbar und $2n + 5 = (2n + 3) + 2$ lässt bei Division durch 3 den Rest 2. Also ist nur $2n + 3$ durch 3 teilbar.
- Lässt $2n + 1$ bei Division durch 3 den Rest 2, so lässt $2n + 3 = (2n + 1) + 2$ bei Division durch 3 den Rest 1 und $2n + 5 = (2n + 1) + 4$ ist durch 3 teilbar.

Von den drei Zahlen ist also genau eine durch 3 teilbar.

(2) Unter vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen ist höchstens eine durch 5 teilbar: Vier aufeinanderfolgende ungerade Zahlen haben die Gestalt
$2n + 1, 2n + 3, 2n + 5, 2n + 7$. Wie im Beweis von (1) kann man die Fälle durchgehen, dass $2n + 1$ den Rest $0, 1, 2, 3$ oder 4 bei Division durch 5 lässt, mehr Möglichkeiten gibt es nicht. Im ersten Fall lassen die anderen drei Zahlen der Reihenfolge nach dieselben Reste wie $2,4,6$, es ist also keine durch 5 teilbar. Wenn $2n + 1$ den Rest 1 lässt, so lassen die anderen drei Zahlen der Reihenfolge nach die gleichen Reste wie $3,5,7$, also ist nur eine durch 5 teilbar. Wenn $2n + 1$ den Rest 2 lässt, so lassen die anderen drei Zahlen der Reihenfolge nach die gleichen Reste wie $4,6,8$, also ist keine durch 5 teilbar. Wenn $2n + 1$ den Rest 3 lässt, so lassen die anderen drei Zahlen der Reihenfolge nach die gleichen Reste wie $5,7,9$, also ist nur eine durch 5 teilbar. Wenn $2n + 1$ den Rest 4 lässt, so lassen die anderen drei Zahlen der Reihenfolge nach die gleichen Reste wie $6,8,10$, also ist nur eine durch 5 teilbar. Somit ist höchstens eine der vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen durch 5 teilbar.

Nun zum eigentlichen Beweis.
Wir betrachten beliebige acht aufeinanderfolgende Zahlen. Gesucht ist eine der acht Zahlen, die zu den anderen sieben Zahlen teilerfremd ist, also mit jeder anderen Zahl nur 1 als gemeinsamen Teiler hat.
Jede zweite der acht Zahlen ist gerade. Es gibt unter den acht Zahlen vier gerade und vier ungerade. Die geraden Zahlen haben mit den anderen geraden Zahlen zumindest den gemeinsamen Teiler 2, sie kommen also für die gesuchte Zahl nicht in Frage.

Wir betrachten also die ungeraden Zahlen. Die vier ungeraden Zahlen sind aufeinanderfolgende ungerade Zahlen. Nach (1) ist von den ersten drei ungeraden Zahlen genau eine durch 3 teilbar. Die vierte ungerade Zahl könnte auch noch durch 3 teilbar sein, in jedem Fall sind unter den vier ungeraden Zahlen höchstens zwei, die durch 3 teilbar sind. Es bleiben also mindestens zwei ungerade Zahlen übrig, die nicht durch 3 teilbar sind.

Von den vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen kann nach (2) höchstens eine durch 5 teilbar sein. Von den beiden die nicht durch 3 teilbar sind, kann also höchstens eine durch 5 teilbar sein. Zusammenfassend bleibt also eine ungerade Zahl übrig, die weder durch 3 noch durch 5 teilbar ist. Ihr kleinster Teiler größer als 1 ist also mindestens 7. Wir nennen diese Zahl z.

Fall 1: z ist weder die größte noch die kleinste der acht Zahlen. Dann kann keine der anderen sieben Zahlen durch 7 teilbar sein, denn die nächstkleinere durch 7 teilbare Zahl ist $z - 7$, die nächstgrößere Zahl ist $z + 7$. Diese beiden Zahlen gehören aber nicht mehr zu den acht aufeinanderfolgenden Zahlen, wenn z nicht die größte oder kleinste der acht Zahlen ist.
Ist t ein gemeinsamer Teiler von z mit der von z verschiedenen Zahl x, die auch unter den acht Zahlen vorkommt, so ist t auch ein Teiler von $|z - x|$. Da $0 < |z - x| \leq 7$ kann t höchstens 7 sein. Da aber x nicht durch 7 und z nicht durch eine der Zahlen von 2 bis 6 teilbar ist, kann t nur 1 sein. Die Zahl z ist also zu allen anderen der acht Zahlen teilerfremd.

Fall 2: z ist die größte oder kleinste der acht Zahlen. Dann sind die anderen drei ungeraden Zahlen aufeinanderfolgende ungerade Zahlen. Nach (1) und (2) ist genau eine von diesen durch 3 und höchstens eine von ihnen durch 5 teilbar. Keine dieser drei von z verschiedenen ungerade Zahlen kann durch 7 teilbar sein, da ja z schon durch 7 teilbar ist und die beiden Zahlen $z + 7$ bzw. $z - 7$, die möglicherweise unter den acht Zahlen auch vorkommen, sind gerade. Somit gibt es unter den drei von z verschiedenen ungeraden Zahlen eine, die weder durch 3, 5 oder 7 teilbar ist.
Diese Zahl y muss zu allen anderen der acht Zahlen teilerfremd sein: Ist t ein gemeinsamer Teiler von y mit der von y verschiedenen Zahl x, die auch unter den acht Zahlen vorkommt, so ist t auch ein Teiler von $|y - x|$. Da $0 < |y - x| \leq 7$ kann t höchstens 7 sein. Da aber y nicht durch eine der Zahlen von 2 bis 7 teilbar ist, kann t nur 1 sein. Die Zahl y ist also zu allen anderen der acht Zahlen teilerfremd.

In jedem Fall gibt es also eine Zahl, die zu allen anderen der acht Zahlen teilerfremd ist. Das war zu beweisen.

2. Beweisvorschlag:

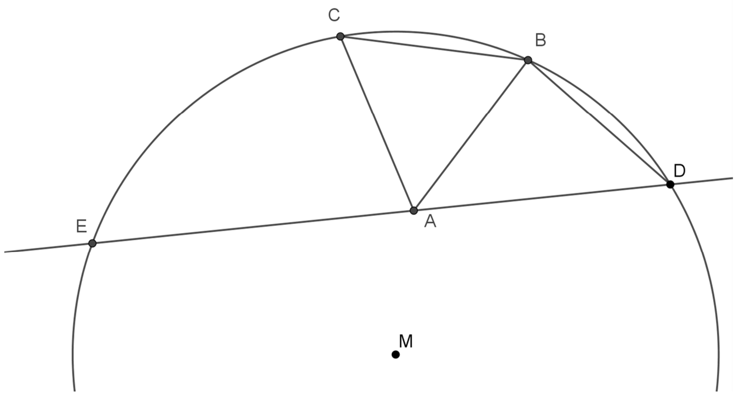
Die acht aufeinanderfolgenden Zahlen seien $n, n+1, \dots, n+7$. In der Mitte der acht Zahlen befinden sich die beiden Zahlen $n+3$ und $n+4$. Genau eine dieser beiden Zahlen in der Mitte ist ungerade. Wir nennen diese ungerade Zahl in der Mitte u.

Fall 1: u ist durch 3 teilbar.
Dann gibt es nur eine ungerade durch 3 teilbare Zahl unter den acht Zahlen, denn $u+3$ und $u-3$ sind gerade. Die Zahlen $u+6$ bzw. $u-6$ gehören schon nicht mehr zu den acht Zahlen. Da es auch nur höchstens eine ungerade durch 5 und eine ungerade durch 7 teilbare Zahl unter den acht Zahlen geben kann (s. 1. Beweisvorschlag), gibt es bei vier ungeraden Zahlen mindestens eine, die nicht durch 3, 5 und 7 teilbar ist. Sie ist zu den anderen sieben Zahlen teilerfremd.

Fall 2: u ist nicht durch 3 teilbar.
Dann ist u zu allen anderen sieben Zahlen teilerfremd. Denn selbst wenn u durch 5 oder 7 teilbar wäre, so wäre keine andere der acht Zahlen durch 5 bzw. 7 teilbar, da $u+5$ bzw. $u-5$ bereits nicht mehr zu den acht Zahlen gehören, da u in der Mitte liegt.

Aufgabe 4

Gegeben ist ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radiuslänge r. Ein gleichseitiges Dreieck ABC liegt so, dass A im Innern des Kreises und B und C auf der Kreislinie liegen. Ein von C verschiedener Punkt D liegt so auf der Kreislinie, dass $\overline{DB} = \overline{BC}$ gilt. Die Gerade DA schneidet den Kreis in den beiden Punkten D und E.
Zeige: $\overline{EA} = r$



Vorbemerkung:
Grundsätzlich sind für die Lage von A die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:
1. A liegt innerhalb des Dreiecks MBC
2. $A = M$
3. A liegt außerhalb des Dreiecks MBC

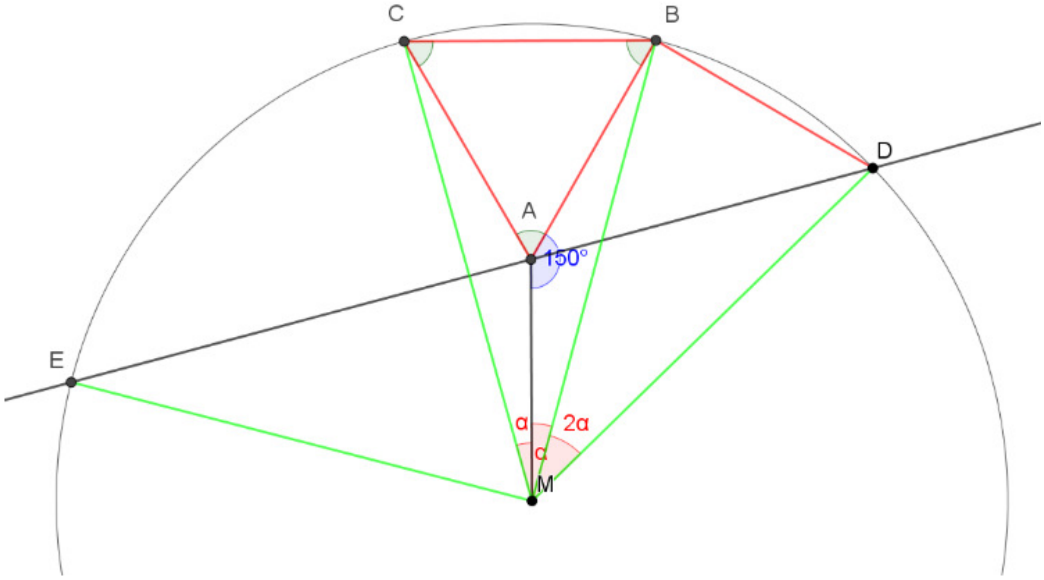
Der 1. Fall wird im Folgenden ausführlich untersucht.
Im 2. Fall ist die zu zeigende Behauptung klar, weil dann $\overline{EA} = \overline{EM} = r$ ist.
Der 3. Fall kann analog zum 1. Fall behandelt werden mit entsprechend veränderten Winkelnamen und Winkelbeziehungen.

1. Beweisvorschlag:

Nach dem Kongruenzsatz SSS sind die beiden Dreiecke MAC und BAM kongruent:

- Die Seiten $\overline{MC}$ bzw. $\overline{MB}$ sind Radien r des gegeben Kreises und daher gleich lang.
- Die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ sind Seiten des gegebenen gleichseitigen Dreiecks ABC und daher ebenfalls gleich lang.
- Die Seite $\overline{AM}$ haben beide Dreiecke gemeinsam.

Aus dieser Kongruenz folgt $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMA$. Wir bezeichnen diesen Winkel mit α.
Nach dem Kongruenzsatz SSS sind auch die Dreiecke DBM und BCM kongruent, denn es sind gleichschenklige Dreiecke mit gleich langen Basen $\overline{DB} = \overline{BC}$ und gleichlangen Schenkeln, die alle Radien des Kreises sind.
Somit ist $\sphericalangle DMB = \sphericalangle BMC = 2\alpha$.



Da das Dreieck DBM gleichschenklig ist, gilt nun nach Winkelsummensatz im Dreieck:
$\sphericalangle MBD = \sphericalangle BDM = \frac{1}{2} \cdot (180° - 2\alpha) = 90° - \alpha$. Ebenso ist $\sphericalangle MCB = \sphericalangle CBM = 90° - \alpha$.
Daraus ergibt sich $\sphericalangle ABM = \sphericalangle CBM - 60° = (90° - \alpha) - 60° = 30° - \alpha$.
Daher ist also $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABM + \sphericalangle MBD = (30° - \alpha) + (90° - \alpha) = 120° - 2\alpha$.
Für das gleichschenklige Dreieck ADB folgt nun:

$$\sphericalangle BDA = \frac{[180° - \sphericalangle ABD]}{2} = \frac{[180° - (120° - 2\alpha)]}{2} = 30° + \alpha \,.$$

Damit ist $\sphericalangle EDM = \sphericalangle BDM - \sphericalangle BDA = (90° - \alpha) - (30° + \alpha) = 60° - 2\alpha$.
Da auch das Dreieck DEM gleichschenklig ist, ergibt sich

$$\sphericalangle MED = \sphericalangle EDM = 60° - 2\alpha.$$

Damit ist nach Winkelsummensatz für das Dreieck DEM:

$$\sphericalangle DME = 180° - 2 \cdot (60° - 2\alpha) = 60° + 4\alpha.$$

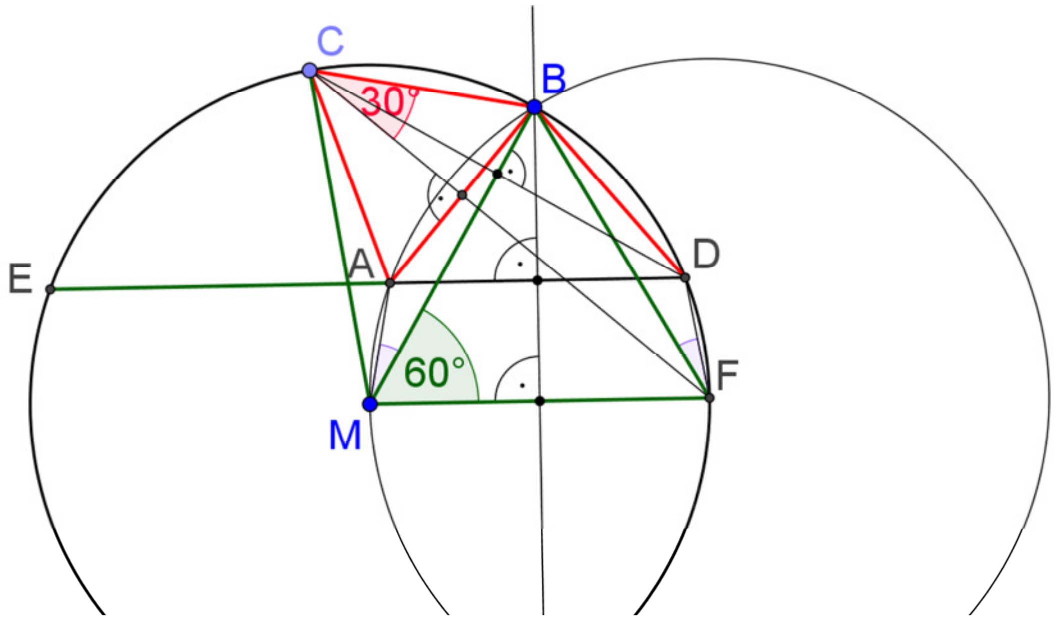
Da $\sphericalangle DMA = 3\alpha$ folgt $\sphericalangle AME = \sphericalangle DME - \sphericalangle DMA = (60° + 4\alpha) - 3\alpha = 60° + \alpha$.

Aus dem Winkelsummensatz für das Dreieck EMA folgt wiederum:

$$\begin{aligned} \sphericalangle EAM &= 180° - \sphericalangle AME - \sphericalangle MEA \\ &= 180° - (60° + \alpha) - (60° - 2\alpha) = 60° + \alpha = \sphericalangle AME \end{aligned}$$

Somit ist das Dreieck EMA gleichschenklig und daher $\overline{EA} = \overline{EM} = r$.
Das war zu beweisen.

2. Beweisvorschlag:



Die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ schneidet den Kreis außer in C noch im Punkt F. Da das Dreieck ABC gleichseitig ist, folgt $\sphericalangle FCB = 30°$. Der zugehörige Mittelpunktswinkel $\sphericalangle FMB$ ist doppelt so groß, hat also die Weite 60°. Das gleichschenklige Dreieck FBM ist daher gleichseitig und $\overline{MB} = \overline{FB} = r$.

Nach dem Kongruenzsatz SSS sind die beiden Dreiecke MAC und BAM kongruent (s. Beginn des ersten Beweisvorschlags). Daraus folgt $\sphericalangle BMA = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BMC$.
Nach dem Umfangswinkelsatz ist der Mittelpunktswinkel $\sphericalangle BMC$ doppelt so groß wie der Umfangswinkel $\sphericalangle BFC$. Somit folgt $\sphericalangle BMA = \sphericalangle BFC$.
Da $\overline{BC} = \overline{BD}$ folgt nach dem Umfangswinkelsatz auch $\sphericalangle BFC = \sphericalangle DFB$.
Es folgt also $\sphericalangle BMA = \sphericalangle DFB$. Außerdem ist, da die Dreieck MBC und MDB kongruent sind, $\sphericalangle A\mathrm{BM} = \sphericalangle \mathrm{C}B\mathrm{M} - 60° = \sphericalangle \mathrm{MBD} - 60° = \sphericalangle FB\mathrm{D}$.
Nach dem Kongruenzsatz WSW sind nun die Dreiecke BAM und BFD kongruent:

- $\sphericalangle A\mathrm{BM} = \sphericalangle FB\mathrm{D}$
- $\overline{MB} = \overline{FB} = r$
- $\sphericalangle BMA = \sphericalangle DFB$

Die kongruenten Dreiecke BAM und BFD liegen also symmetrisch außen am gleichseitigen Dreieck MFB, sie liegen daher achsensymmetrisch zur Mittelsenkrechten von $\overline{MF}$. Daher ist diese Mittelsenkrechte von $\overline{MF}$ auch eine Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ABD$. Im gleichschenkligen Dreieck ADB ist die Winkelhalbierende zu $\sphericalangle ABD$ auch Mittelsenkrechte auf der Basis $\overline{AD}$. Da $\overline{AD}$ und $\overline{MF}$ eine gemeinsame Orthogonale haben sind $\overline{AD}$ und $\overline{MF}$ parallel. Insbesondere sind $\overline{EA}$ und $\overline{MF}$ parallel.

Spiegelt man den gegebenen Kreis an der Mittelsenkrechten zu $\overline{MF}$, so geht der Kreis in einen Kreis mit gleichem Radius über, der Mittelpunkt M des ursprünglichen Kreises geht in den Mittelpunkt F des gespiegelten Kreises über und D geht in A über. Man erhält den gespiegelten Kreis aber auch aus dem Ausgangskreis durch eine Parallelverschiebung, die die Mittelpunkte M und F ineinander überführt.
Die Länge der Verschiebung ist also der Radius r. Diese Verschiebung überführt E in A, denn $\overline{EA}$ ist parallel zu $\overline{MF}$. Somit ist $\overline{EA} = \overline{MF} = r$.