Landeswettbewerb Mathematik

Baden-Württemberg
Musterlösungen 2. Runde 2015/2016

Aufgabe 1

An der Tafel steht eine positive ganze Zahl. Abwechselnd ersetzen Nora und Marius die Zahl an der Tafel durch eine neue nach folgender Regel: Wer am Zug ist,

- *wählt einen positiven Teiler der Zahl an der Tafel aus,*
- *subtrahiert ihn von der Zahl an der Tafel und*
- *ersetzt die Zahl an der Tafel durch das Ergebnis dieser Rechnung.*

Wer die Zahl 0 hinschreiben muss, hat verloren. Nora beginnt. Bestimme alle Anfangszahlen, bei denen sie den Gewinn erzwingen kann.

Lösung:

Nora kann genau dann den Gewinn erzwingen, wenn am Anfang eine gerade Zahl an der Tafel steht.

Beweisvorschlag:

Jede positive ganze Zahl hat mindestens einen Teiler, zumindest die 1 ist nämlich ein Teiler. Jeder Teiler ist positiv und höchstens so groß wie die Zahl selbst. Damit ist bei jeder positiven Zahl an der Tafel ein Zug möglich, nach jedem Zug ist die neue Zahl an der Tafel nicht negativ und kleiner als die bisherige Zahl. Nach endlich vielen Schritten ist die Zahl 0 erreicht und das Spiel ist zu Ende.

Das Vielfache einer geraden Zahl ist gerade. Eine ungerade Zahl hat somit nur ungerade Teiler. Da die Differenz zweier ungerader Zahlen gerade ist, muss jeder, der bei seinem Zug eine ungerade Zahl vorfindet, als neue Zahl auf jeden Fall eine gerade Zahl hinschreiben.

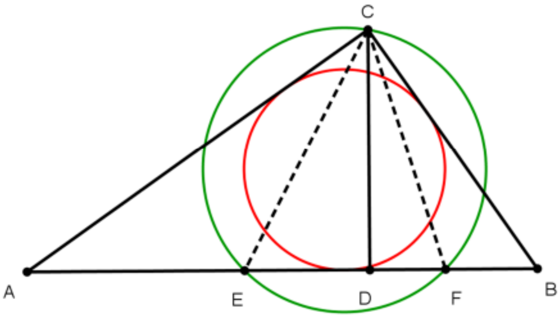
Jede gerade Zahl hat mindestens einen ungeraden Teiler, nämlich die Zahl 1. Die Differenz aus einer geraden und einer ungeraden Zahl ist ungerade. Wer bei seinem Zug also eine gerade Zahl vorfindet, kann einen ungeraden Teiler auswählen und so erreichen, dass die neue Zahl an der Tafel ungerade ist, insbesondere, dass sie nicht 0 ist.

Falls also Nora am Anfang eine gerade Zahl an der Tafel vorfindet, kann sie mit folgender Strategie gewinnen: Sie erreicht, dass nach ihrem Zug die Zahl an der Tafel ungerade und kleiner als die ursprüngliche Zahl ist. Nun muss Marius als nächstes eine gerade und wiederum kleinere Zahl an die Tafel schreiben. Falls diese Zahl die 0 ist, hat Nora gewonnen; falls nicht, kann Nora die gleiche Strategie mit einer kleineren geraden Zahl erneut anwenden. Nach endlich vielen solchen Zügen muss die Zahl von Marius die 0 sein, d.h. Nora hat den Gewinn erzwungen.

In allen anderen Fällen, d.h. wenn Nora am Anfang eine ungerade Zahl an der Tafel vorfindet, kann Nora den Gewinn nicht erzwingen: Sie muss nämlich als nächstes eine gerade Zahl an die Tafel schreiben. Entweder ist diese die 0, dann hat Nora verloren, oder sie ist größer als 0, dann kann Marius die obige Strategie zum Gewinn anwenden, auch dann hat Nora verloren.

Aufgabe 2

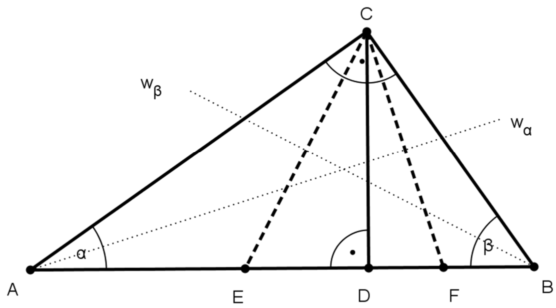
Das Dreieck ABC ist rechtwinklig bei C, der Fußpunkt der Höhe durch C ist D. Die Winkelhalbierenden der Winkel $\sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle DCB$ schneiden die Seite AB in den Punkten E bzw. F.
Beweise: Der Umkreis des Dreiecks EFC und der Inkreis des Dreiecks ABC haben den gleichen Mittelpunkt.



1. Beweisvorschlag (mit gleichschenkligen Dreiecken):

Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_α und w_β der Winkel α bzw. β.

Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks EFC ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecken EC und FC.



Es genügt also zu zeigen, dass w_α die Mittelsenkrechte der Strecke FC ist und w_β die Mittelsenkrechte der Strecke EC. Dazu zeigen wir, dass die Dreiecke AFC und EBC gleichschenklig mit Basis FC bzw. EC sind. Dazu beweisen wir, dass die Basiswinkel gleich groß sind.

Das Dreieck ADC ist rechtwinklig bei D, also gilt

$$\sphericalangle ACD = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha.$$

Da CE auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle ACD$ liegt, ergibt sich

$$\sphericalangle ACE = \tfrac{1}{2}(90° - \alpha) = 45° - \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Weil das Dreieck ABC rechtwinklig bei C ist, folgt

$$\sphericalangle ECB = 90° - \sphericalangle ACE = 90° - (45° - \tfrac{1}{2}\alpha) = 45° + \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Schließlich ergibt sich aus dem Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck AEC:

$$\sphericalangle BEC = 180° - \sphericalangle CEA = 180° - (180° - \alpha - \sphericalangle ACE)$$
$$= \alpha + \sphericalangle ACE = \alpha + (45° - \tfrac{1}{2}\alpha) = 45° + \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Also gilt $\sphericalangle ECB = \sphericalangle BEC$; das Dreieck EBC ist also gleichschenklig mit Basis EC.

Analog zeigt man, dass das Dreieck AFC gleichschenklig mit Basis FC ist.

Weil in gleichschenkligen Dreiecken die Winkelhalbierende des Spitzenwinkels die Symmetrieachse des Dreiecks und damit auch die Mittelsenkrechte der Basis ist, ist w_α die Mittelsenkrechte der Strecke FC und w_β die Mittelsenkrechte der Strecke EC ist. Dies war zu zeigen.

2. Beweisvorschlag (mit Satz vom Mittelpunktswinkel):

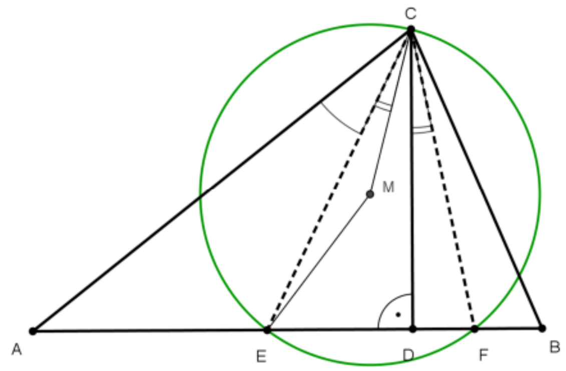
Mit M wird der Umkreismittelpunkt des Dreiecks EFC bezeichnet. Nach Konstruktion sind alle Innenwinkel des Dreiecks EFC spitz, der Punkt M liegt also innerhalb des Dreiecks EFC.

Behauptung 1: Der Punkt M liegt im Dreieck ABC auf der Winkelhalbierenden des Innenwinkels bei C, es gilt also $\sphericalangle ACM = 45°$.

Beweis von Behauptung 1: Nach dem Satz vom Mittelpunktswinkel ist im Kreis der Mittelpunktswinkel $\sphericalangle CME$ zur Sehne CE doppelt so groß wie der Umfangswinkel $\sphericalangle CFE$. Somit $\sphericalangle CME = 2 \cdot \sphericalangle CFE$.

Weil das Dreieck CME gleichschenklig ist (CM und EM sind Radien des Umkreises des Dreiecks EFC) ergibt sich für die Größe des Basiswinkels in diesem Dreieck

$$\begin{aligned}\sphericalangle ECM &= \tfrac{1}{2} \cdot (180° - \sphericalangle CME) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot (180° - 2 \cdot \sphericalangle CFE) \\ &= 90° - \sphericalangle CFE.\end{aligned}$$



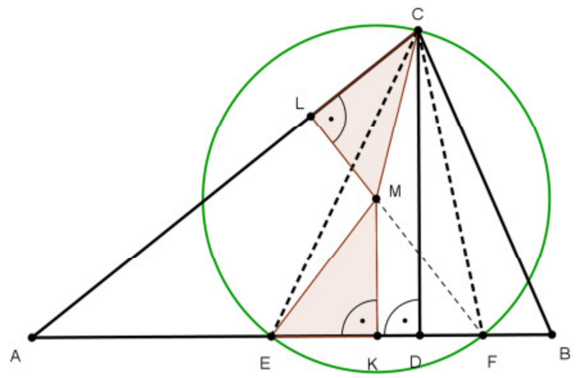
Da CF auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle DCB$ liegt, folgt für das Dreieck DFC:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle DCB = \sphericalangle DCF = 90° - \sphericalangle CFE.$$

Zusammen ergibt sich $\sphericalangle ECM = \tfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle DCB$. Dies bedeutet

$$\sphericalangle ACM = \sphericalangle ACE + \sphericalangle ECM = \tfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle ACD + \tfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle DCB = \tfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle ACB = 45°.$$

Behauptung 2: Es seien L und K die Fußpunkte der Lote von M auf AC bzw. AB. Dann sind die beiden Dreiecke MCL und EKM kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke.



Beweis von Behauptung 2: Beide Dreiecke sind rechtwinklig und haben den Umkreisradius $\overline{CM} = \overline{EM}$ als Hypotenusenlänge.
Nach dem Satz vom Mittelpunktswinkel gilt

$$\begin{aligned}\sphericalangle EMF &= 2 \cdot \sphericalangle ECF = 2 \cdot (\sphericalangle ECD + \sphericalangle DCF) \\ &= 2 \cdot \sphericalangle ECD + 2 \cdot \sphericalangle DCF \\ &= \sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB = 90°.\end{aligned}$$

Daher ist mit Behauptung 1 $\sphericalangle EMK = \tfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle EMF = 45° = \sphericalangle CML = \sphericalangle ACM$.
Die beiden Dreiecke sind also kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke.

Nach Behauptung 2 ist $\overline{LM} = \overline{KM}$. M hat also von den Schenkeln AC und AB von α den gleichen Abstand. Daher liegt M auf der Winkelhalbierenden von α. Nach Behauptung 1 liegt M auch auf der Winkelhalbierenden von γ und ist demnach der Inkreismittelpunkt.

Aufgabe 3

Das nebenstehende Zahlenfeld wird nach rechts und nach unten so fortgesetzt, dass in jeder der unendlich vielen Zeilen und Spalten eine arithmetische Folge steht.
Zeige: Eine positive ganze Zahl n kommt in diesem Zahlenfeld genau dann nicht vor, wenn 2n+1 eine Primzahl ist.

Bemerkung: Eine Zahlenfolge heißt arithmetische Folge, wenn die Differenz zweier aufeinander folgender Folgenglieder immer gleich ist.

4	7	10	13	...
7	12	17	22	...
10	17	24	31	...
13	22	31	40	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Beweisvorschlag:

Die Zahl, die in Zeile r und Spalte s des Zahlenfeldes steht, sei mit a(r;s) bezeichnet (r und s sind positive ganze Zahlen).

Behauptung: Es ist a(r;s) = 2rs+r+s für alle r und s.

***Beweis der Behauptung*:** Die Zahlen einer arithmetischen Folge kann man schon aus den ersten beiden Zahlen der Folge berechnen: Ist a die erste Zahl und b die zweite Zahl der Folge, so ist $d = b - a$ die konstante Differenz von je zwei aufeinanderfolgenden Zahlen der Folge. Die Zahlen der Folge lauten also a, a+d, a+2d, a+3d,….. Die k-te Zahl der Folge ist also a+(k-1)d.
Da $d = b - a$ lauten die Folgenglieder somit

a, a+(b-a), a+2(b-a), oder allgemein $a + (k-1)\cdot(b-a)$. (*)

Die r-te Zahl der Zahlenfolge in der ersten Spalte, die mit 4 und 7 beginnt, ist nach (*)

$$a(r;1) = 4 + (r-1)\cdot(7-4) = 3r+1.$$

Die r-te Zahl der Folge der zweiten Spalte, die mit 7 und 12 beginnt, ist nach (*)

$$a(r;2) = 7 + (r-1)\cdot(12-7) = 5r+2.$$

Die arithmetische Folge in Zeile r beginnt mit den beiden Zahlen $a(r;1) = 3r+1$ und $a(r;2) = 5r+2$. Die s-te Zahl dieser Zeile ist nach (*)

$$\begin{aligned} a(r;s) &= a(r;1) + (s-1)\cdot(a(r;2) - a(r;1)) \\ &= 3r+1+(s-1)\cdot\left(5r+2-(3r+1)\right) \\ &= 3r+1+(s-1)\cdot\left(2r+1\right) \end{aligned}$$

Durch Umformung ergibt sich

$$a(r;s) = 3r+1+(s-1)\cdot\left(2r+1\right) = 3r+1+2sr-2r+s-1 = 2sr+r+s.$$

Das beweist die Behauptung.

Zum Beweis der Aufgabe sind nun zwei Richtungen zu zeigen:

(A) Wenn eine Zahl n im Zahlenfeld vorkommt, so ist die Zahl 2n+1 keine Primzahl.

(B) Wenn 2n+1 keine Primzahl ist, so kommt n im Zahlenfeld vor.

Zum Beweis von (A):

Sei n eine positive ganze Zahl, die im Zahlenfeld vorkommt. Wenn n in Zeile r und Spalte s des Zahlendfelds steht, so n = a(r;s) = 2rs+r+s (s. Behauptung).

Dann

$$2n+1=2a(r;s)+1=2\cdot\left(2sr+r+s\right)+1=4rs+2r+2s+1=(2r+1)\cdot(2s+1).$$

Die Zahlen 2r+1 und 2s+1 sind beide größer als 1, also ist 2n+1 zerlegbar in ein Produkt und somit keine Primzahl. Dies beweist (A).

Zum Beweis von (B):

Sei n eine positive ganze Zahl, für die 2n+1 keine Primzahl ist. Dann hat 2n+1 einen Teiler u mit 1 < u < 2n+1. Weil 2n+1 ungerade ist, ist u ebenfalls ungerade.

Somit $u=2r+1$ für eine Zahl r.

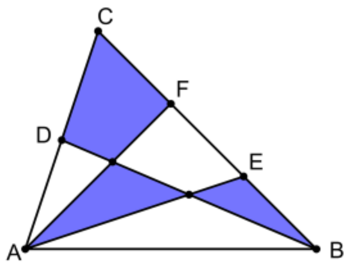
Die Zahl $v=\dfrac{2n+1}{u}$ ist dann ebenfalls ungerade und größer als 1. Es gibt also eine positive ganze Zahl s mit $v=2s+1$.

Folglich ist $2n+1=u\cdot v=(2r+1)\cdot(2s+1)=4rs+2r+2s+1$.

Dies ergibt $n=2rs+r+1$. Nach der Behauptung ist somit n=a(r;s) und kommt also im Zahlenfeld vor. Somit ist auch (B) bewiesen.

Aufgabe 4

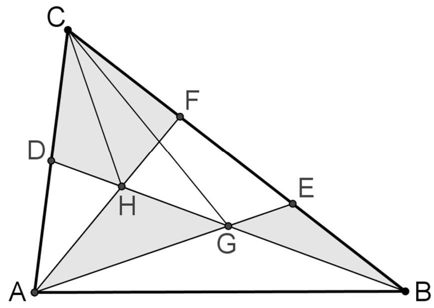
In einem Dreieck ABC ist D der Mittelpunkt der Seite AC. Die Punkte E und F teilen die Seite BC in drei gleich lange Teile.
In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte des schattierten und des nicht-schattierten Anteils des Dreiecks?



Lösung:

Das gesuchte Verhältnis ist 7:8.

1. Beweisvorschlag (mit Flächeninhalten):



G und H sind die Schnittpunkte von BD mit AE bzw. AF. Im Folgenden wird mit F(XYZ) bzw. F(WXYZ) der Flächeninhalt des Dreiecks XYZ bzw. des Vierecks WXYZ bezeichnet.
Da $\overline{AD} = \overline{CD}$ ist, gilt:
(1) F(ABD) = F(DBC)
(2) F(AGD) = F(DGC)
(3) F(AHD) = F(DHC)

(1) und (2) ergibt:
(4) F(ABG) = F(BCG)
Da $\overline{BE} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BC}$ folgt aus (4) $F(BEG) = \frac{1}{3} \cdot F(BCG) = \frac{1}{3} \cdot F(ABG)$ bzw. $F(ABG) = 3 \cdot F(BEG)$.
Aus $\overline{BE} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BC}$ folgt außerdem
$\frac{1}{3} \cdot F(ABC) = F(ABE) = F(ABG) + F(BEG) = 3 \cdot F(BEG) + F(BEG) = 4 \cdot F(BEG)$.
Folglich:
(5) $F(BEG) = \frac{1}{12} \cdot F(ABC)$ und
(6) $F(ABG) = \frac{1}{4} \cdot F(ABC)$
Aus (1) bis (3) folgt auch
(7) $F(ABH) = F(HBC)$
Aus $\overline{BF} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BC}$ und (7) folgt $F(HBF) = \frac{2}{3} \cdot F(HBC) = \frac{2}{3} \cdot F(ABH)$.
Somit $\frac{2}{3} \cdot F(ABC) = F(ABF) = F(ABH) + F(HBF) = F(ABH) + \frac{2}{3} \cdot F(ABH) = \frac{5}{3} \cdot F(ABH)$.
Folglich:
(8) $F(ABH) = \frac{2}{5} \cdot F(ABC)$.
Mit (6) und (8) erhält man:
(9) $F(AGH) = F(ABH) - F(ABG) = \frac{2}{5} \cdot F(ABC) - \frac{1}{4} \cdot F(ABC) = \frac{3}{20} \cdot F(ABC)$.

Somit $F(AHD) = F(ABD) - F(ABH) = \frac{1}{2}\cdot F(ABC) - \frac{2}{5}\cdot F(ABC) = \frac{1}{10}\cdot F(ABC)$.
Also folgt
(10) $F(DHFC) = F(AFC) - F(AHD) = \frac{1}{3}\cdot F(ABC) - \frac{1}{10}\cdot F(ABC) = \frac{7}{30}\cdot F(ABC)$.
Mit (5), (9) und (10) erhält man
$F(\text{schattiert}) = F(BEG) + F(AGH) + F(DHFC) = \left(\frac{1}{12} + \frac{3}{20} + \frac{7}{30}\right)\cdot F(ABC) = \frac{7}{15}\cdot F(ABC)$.
Daraus folgt $F(\text{nichtschattiert}) = \frac{8}{15}\cdot F(ABC)$ und
$F(\text{schattiert}) : F(\text{nichtschattiert}) = 7 : 8$.

2. Beweisvorschlag (mit Vektorenrechnung und Geradengleichungen):

Das gegebene Dreieck ABC liegt so in einem kartesischen Koordinatensystem, dass die Eckpunkte die Koordinaten A(0|0), B(b|0) und C(c|h) haben. Damit erhält man $D(\frac{c}{2}|\frac{h}{2})$,
$E\left(b + \frac{1}{3}(c-b)\middle|\frac{h}{3}\right) = E\left(\frac{2}{3}b + \frac{c}{3}\middle|\frac{h}{3}\right)$ und $F\left(b + \frac{2}{3}(c-b)\middle|\frac{2}{3}h\right) = F\left(\frac{b}{3} + \frac{2}{3}c\middle|\frac{2}{3}h\right)$.
Nun kann man folgende Geradengleichungen aufstellen:
$BD: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + t\cdot\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} c-2b \\ h \end{pmatrix}$, $AE: \vec{x} = r\cdot\overrightarrow{AE} = r\cdot\begin{pmatrix} 2b+c \\ h \end{pmatrix}$ und
$AF: \vec{x} = s\cdot\overrightarrow{AF} = s\cdot\begin{pmatrix} b+2c \\ 2h \end{pmatrix}$
Für den Schnittpunkt G der Geraden BD mit AE gilt:
(I) $b + t\cdot(c-2b) = r\cdot(2b+c)$ und (II) $th = rh$
Aus (II) folgt t = r, eingesetzt in (I) ergibt sich $t = r = \frac{1}{4}$, somit $G(\frac{b}{2} + \frac{c}{4}|\frac{h}{4})$
Ebenso ist $H(\frac{b}{5} + \frac{2}{5}c|\frac{2}{5}h)$ der Schnittpunkt H der Geraden BD und AF.
Damit
$F(BEG) = F(ABE) - F(ABG) = \frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{1}{3}\cdot h - \frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{1}{4}\cdot h = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\cdot b\cdot h = \frac{1}{12}\cdot F(ABC)$
$F(AGH) = F(ABH) - F(ABG) = \frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{2}{5}\cdot h - \frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{1}{4}\cdot h = \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot b\cdot h = \frac{3}{20}\cdot F(ABC)$
$F(AHD) = F(ABD) - F(ABH) = \frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{1}{2}\cdot h - \frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{2}{5}\cdot h = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot b\cdot h = \frac{1}{10}\cdot F(ABC)$ und
$F(DHFC) = F(AFC) - F(AHD) = \frac{1}{3}\cdot F(ABC) - \frac{1}{10}\cdot F(ABC) = \frac{7}{30}\cdot F(ABC)$
Dies ergibt schließlich
$F(\text{schattiert}) = F(BEG) + F(AGH) + F(DHFC) = \left(\frac{1}{12} + \frac{3}{20} + \frac{7}{30}\right)\cdot F(ABC) = \frac{7}{15}\cdot F(ABC)$
Daraus folgt $F(\text{nichtschattiert}) = \frac{8}{15}\cdot F(ABC)$ und $F(\text{schattiert}) : F(\text{nichtschattiert}) = 7 : 8$.